Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple: $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1.$

Demostración.

PASOS	RAZONES
(1) $[\![x]\!] \in M_x \rightarrow [\![x]\!] \leq x$	teo. 02 y definición de M_x
(2) Suponer que: $x \not< [\![x]\!] + 1$	reducción al absurdo
(3) $[\![x]\!] + 1 \leq x$	negación del $<$
(4) $[\![x]\!] + 1 \in M_x$	definición de M_x, y $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$
(5) Entonces: $[\![x]\!] + 1 \leq [\![x]\!]$	pues $[\![x]\!] = \text{máx}\,\{M_x\}$
(6) implica: $1 \leq 0$	cancelando $[\![x]\!]$ en cada lado
(7) Así que: $x < [\![x]\!] + 1$	pues afirmar lo contrario resulta falso
(8) $\therefore \quad [\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$	uniendo (1) con (7)

$\square$

http://matematicauniversitaria.com