Cálculo 1

Salomón Ching Briceño
matematicauniversitaria.com

7 de febrero de 2017

Índice general

Capítulo 1

Límites de funciones

Hay tres conceptos principales en cálculo: límite, derivada e integral. Lo más importante para aplicaciones en la ciencia y la ingeniería son la derivada (que describe una tasa de cambio) y la integral (que describe la suma de muchas partes pequeñas). Pero el más básico de los tres conceptos es el límite, porque la derivada e integral, se definen inicialmente en términos de ciertos límites. Por lo que este capítulo inicia el estudio del cálculo con el concepto de límite.

El límite de una función $f(x)$ en un punto c es el número que se obtiene mediante la evaluación de $f(x)$ para valores de x más y más próximos a c, pero no exactamente igual a c. Se hará esta definición más precisa más adelante. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c se denota por:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \tag{1.1}$$

La notación $x \to c$ se lee: $\boldsymbol{x}$ **tiende a** $\boldsymbol{c}$.

La cantidad L en la ecuación (1.1) es un número y es único, si dicho limite existe.

1.1 Cálculo numérico de límites

Sea la función dada por:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

está claro que f no está definida en $x = 1$ pero surgen dos interrogantes:

1 ¿A qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a 1?
2 ¿Cómo sería la gráfica de f para puntos tan cerca como se quiera de $x = 1$?

La respuesta se verá en el siguientes subsecciones.

1.1.1 Por tabulación

Para la primera interrogante pueden usarse dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha, como se ilustra en la tabla (1.1).

x se aproxima a **1** por la izquierda

x se aproxima a **1** por la derecha

x	0.75	0.90	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.10	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

f(*x*) se aproxima a 3

f(*x*) se aproxima a 3

Tabla 1.1: Calculando un límite por tabulación

En el segundo renglón se ve que $f(x)$, tanto por la izquierda como por la derecha, está cada vez más próximo al entero 3 conforme x se aproxima a 1 (primer renglón).

Entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende 1 es 3, y se escribe:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

1.1.2 Por gráfica

Para la segunda pregunta se construye y se analiza el gráfico de la función

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ \Rightarrow \quad f(x) &= x^2 + x + 1\,, \quad x \neq 1 \end{aligned}$$

Graficando $f(x) = x^2 + x + 1$, con $x \neq 1$ en la figura (1.3), resulta una parábola con un *agujero* en el punto $(1, 3)$.

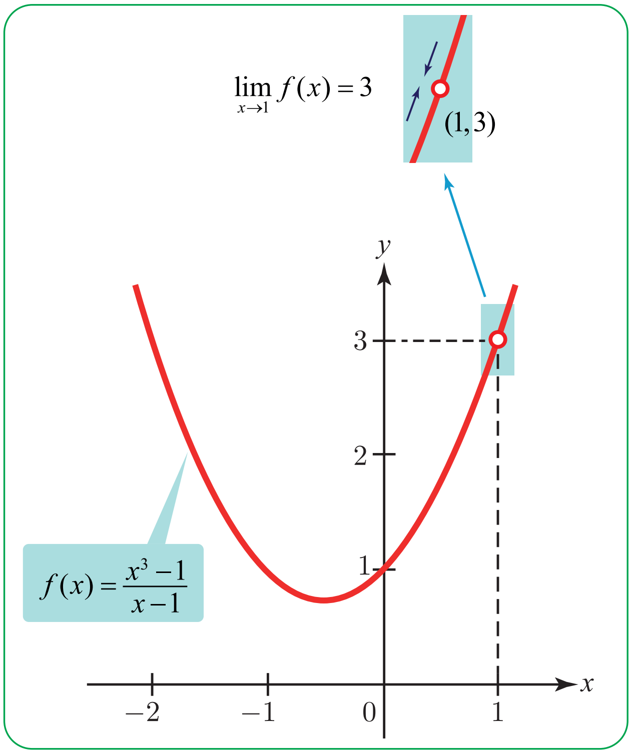

Figura 1.1: Calculando un límite por gráfica

La abscisa $x = 1$ de este par $(1, 3)$, sale del punto donde $f(x)$ no está definida, y la ordenada $y = 3$ sale de $y = x^2 + x + 1$ cuando se reemplaza $x = 1$.

Entonces igual como en la sección anterior se deduce de éste gráfico que el límite de $f(x)$ cuando x tiende 1 es 3, y se simboliza:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

1.2 Cuando un límite no existe

En la tabla (1.1) se vio que $f(x)$ se aproximaba 3, tanto inferior como superior mente. Pero si se hubiese aproximado por debajo de 3 y no por arriba de 3, o viceversa: aproximarse por arriba de 3 pero no por debajo de 3, entonces el límite de $f(x)$ no existe, y en general para cualquier función que presente este cuadro de tabulación al rededor de cierto punto. Esta idea se reforzará con el concepto de *límites laterales* y con el de *límites infinitos*, que se verá más adelante.

El lector deberá comprobar usando el método tabular que el límite de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & , \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

no existe cuando x tiende a 1.

Para dicha tabulación puede usarse una hoja de calculo excel. El siguiente enlace proporciona un buen ejemplo de construcción de este tipo de tablas

link: • Tabular funciones con Excel

La comprobación gráfica puede realizarse con el software libre WinPlot, se proporciona aquí el enlace:

links:
- Descargar WinPlot
- Tutorial graficar funciones.

1.3 Definición de límite

De acuerdo con [1] (pág. 52) se el límite se define de la siguiente manera.

Definición 1.1

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $c \in A$ y sea $L \in \mathbb{R}$ entonces se dice que

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

(léase: límite de $f(x)$ cuando x tiende a $\boldsymbol{c}$)

si $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ (para todo epsilon, existe delta) tal que:

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

Cuando dicho límite existe, éste es un número real L y equivale a decir que los valores de $f(x)$ están tan cerca como se quiera de L cada vez que x se aproxime al número c tanto como se quiera.

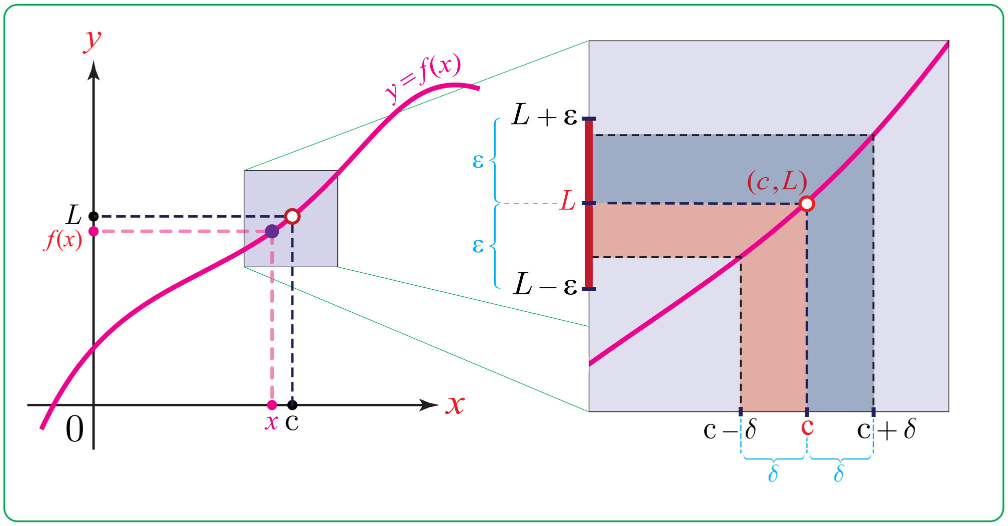

FIGURA 1.2: Interpretación geométrica del límite de f

El conjunto A es cualquier intervalo abierto contenido en el dominio de f, en caso contrario se usará el concepto de límites laterales que se tratará más adelante.

No importa si el número c pertenece o no al conjunto A.
La definición anterior también se le conoce como definición **epsilon-delta** (ϵ-δ).

La desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$ es el intervalo $\langle L-\epsilon \; , L+\epsilon\rangle$ centrado en el número L del eje y en la figura (1.2), en efecto

Si: $|f(x) - L| < \epsilon$

$$\begin{array}{rcccccc} \Rightarrow & -\epsilon & < & f(x) - L & < & \epsilon \\ \Rightarrow & L - \epsilon & < & f(x) & < & L + \epsilon \end{array}$$

entonces: $f(x) \in \langle L - \epsilon \; , \; L + \epsilon\rangle$

El valor de ϵ elegido para el cual δ existe debe ser tan pequeño como se quiera.

Similarmente $0 < |x - c| < \delta$ es el intervalo $\langle c - \delta \; , \; c + \delta\rangle$ con $x \neq c$, centrado en el número c del eje x en la figura (1.2).

1.3.1 Determinando δ para un valor de ϵ

Ejemplo 1. Dado el límite:

$$\lim_{x \to 3} 2x - 5 = 1$$

encontrar δ tal que $|(2x-5) - 1| < 0.01$, siempre que $0 < |x-3| < \delta$.

Solución. En este se a dado un valor de ϵ, a saber: $\epsilon = 0.01$. Para encontrar un δ apropiado, se observa primero que

$$|(2x-5) - 1| = |2x - 6| = 2\,|x-3|$$

$$\Longrightarrow \quad |(2x-5) - 1| = 2\,|x-3|$$

sustituyendo esta última ecuación en en la desigualdad

$$|(2x-5) - 1| < 0.01$$

se obtiene:

$$2\,|x-3| < 0.01$$

$$\Rightarrow \quad |x-3| < 0.005$$

Como $0 < |x-3| < \delta$ puede escogerse $\boxed{\delta = 0.005}$ . . . (*Respuesta*).

El resultado queda comprobado con la figura (1.3). □

Observación 1. El número 0.005 es el máximo valor de δ que garantiza $|(2x-5) - 1| < 0.01$ para toda x en el intervalo $0 < |x-3| < \delta$. Además cualquier valor positivo de δ menor también debe satisfacer esta condición. Por esta razón se usó anteriormente la frase *tan pequeño como se quiera.*

1.3.2 Aplicando la definición ϵ-δ

En el ejemplo 1 se demostró la existencia de δ para un valor particular de ϵ. Pero esto no es suficiente para demostrar que el límite existe. Se necesita un δ para un ϵ cualquiera, esto es, aplicar definición ϵ-δ.

Ejemplo 2. Usar la definición ϵ-δ del límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 3} 4x - 3 = 9.$$

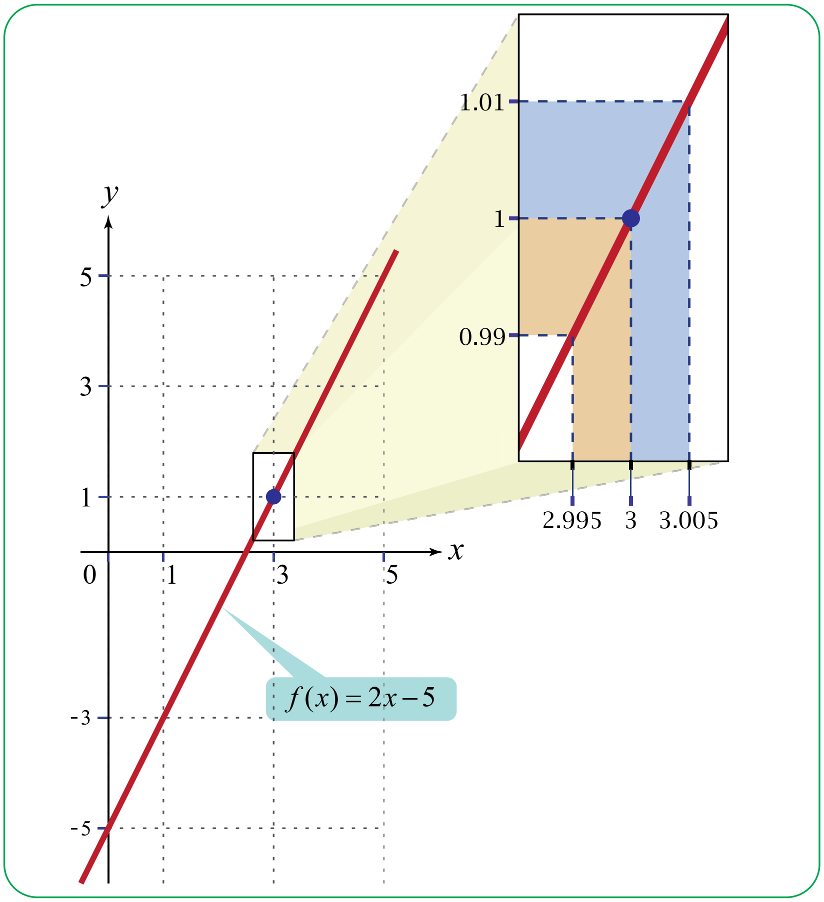

Figura 1.3: El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 es 1

Solución. Se debe probar que $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ tal que: $|(4x-3)-9| < \epsilon$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$.

Es necesario encontrar la relación entre $|(4x-3)-9|$ y $|x-3|$. En efecto, así como en el ejemplo 1, se observa que:

$$|(4x-3)-9| = |4x-12| = 4\,|x-3|$$

De tal modo que $\forall \epsilon > 0$ puede elegirse un $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ debido a que:

$$0 < |x-3| < \delta = \frac{\epsilon}{4}$$

implica:

$$|(4x-3)-9| = 4\,|x-3| < 4\delta = 4\frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad |(4x-3)-9| < \epsilon$$

tal como se muestra en la figura (1.4). $\square$

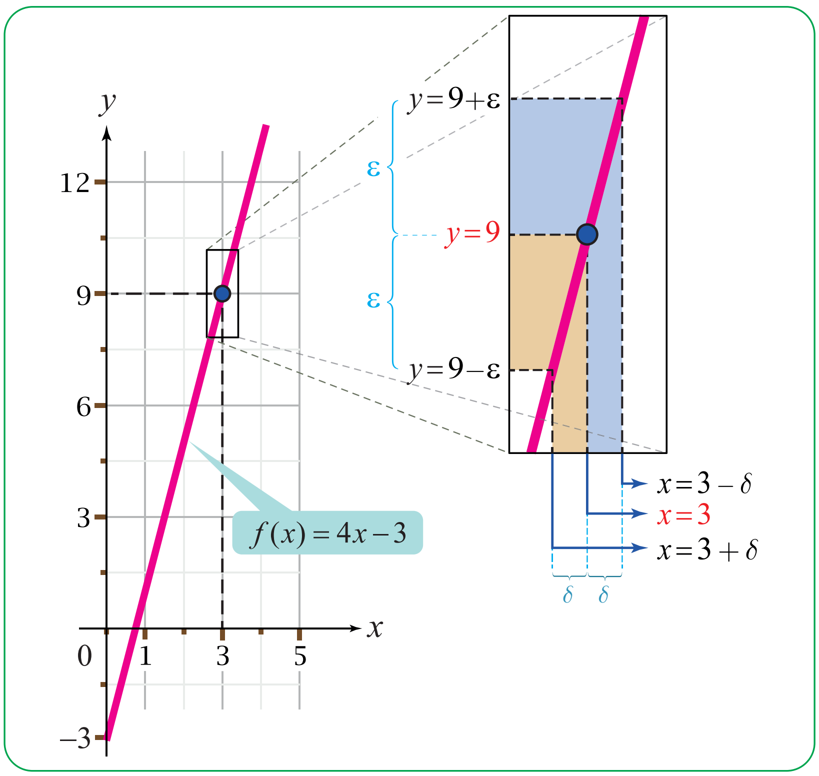

FIGURA 1.4: El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 es 9

Bibliografía

[1] Ron Larson and Bruce Edwards. *Calculus*. Cengage Learning, 2009.