Lógica Simbólica

Lic. Salomón Ching Briceño

http://matematicauniversitaria.com

Setiembre de 2013

Prólogo

La presente obra pone al estudiante uno de los temas de mayor relevancia en la formación de su pensamiento crítico en matemáticas básicas superiores. He tratado de mantener un lenguaje sencillo y puntual, con ejercicios tipo que muestren en la mayoría de las veces lo que el estudiante debe aprender. Pienso que puede ser un buen material tanto para los estudiantes que terminaron su educación secundaria como los del primer ciclo de los Institutos pedagógicos, técnicos, universidades y para cualquier curso cuyo objetivo sea capacitar a los estudiantes para iniciarse en los estudios de cursos superiores. Se ha tenido especial cuidado en reducir las erratas lo más posible. Cada ejercicio propuesto fue resuelto minuciosamente, sin embargo agradecería que me hagan notar cualquier error que pueda haber persistido todavía.

Salomón Ching Briceño.

Índice general

Índice de cuadros

Capítulo 1

Lógica Proposicional

La lógica está enfocada a estudiar la validez de los procesos del razonamiento. Una de sus ramas, la lógica proposicional, utiliza simbología parecida al algebra de los números, y algunas de sus operaciones binarias son similares a las operaciones de suma y de multiplicación de números. Existen partes que son bastante literarias y que se manejan a través de implicaciones notables, uno de los temas centrales de este capítulo. La lógica que se estudiará aquí servirá además para definir la teoría de conjuntos, la cual es previa a lo conceptos genéricos de relaciones y funciones, que son a su vez los temas que preceden a los temas de números reales y funciones de números reales.

1.1. Lista de Símbolos

Los símbolos que se usarán en este capítulo de lógica de las proposiciones se dan a continuación:

$\wedge$	Conjunción, **y**
$\vee$	Disyunción inclusiva, **o**
$\triangle$	Disyunción exclusiva
$\sim$	Negación
$\rightarrow$	Implicación, **entonces**
$\leftrightarrow$	Bicondicional: **si y solo si**
$\equiv$	Equivalente a
$\nrightarrow$	No implica
$\therefore$	Por lo tanto

Cuadro 1.1: *Simbología de la Lógica*

1.2. Proposición

Una proposición es un enunciado cuya propiedad fundamental es la de ser verdadera **(V)** o falsa **(F)**, pero no ambas simultáneamente. Una proposición se representa simbólicamente por letras minúsculas tales como: $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, etc. (llamadas variables proporcionales). Cuando se trata de representar muchas proposiciones similares se usan subíndices para indicar cada una de ellas, esto es,

$$p_1,\, p_2,\, p_3, \dots,\, p_n$$

Ejemplo 1.1
Observemos un grupo de posiciones junto a sus respectivos valores de verdad:

Proposición	**Valor de verdad**
p : "César Vallejo nació en París".	$v(p) = F$
q : "$2 + 3 < 10 - 3$".	$v(q) = V$
r : "El número 1331 es divisible por 11".	$v(r) = V$
t : "Todos los hombres no son mortales".	$v(t) = F$

Cuadro 1.2: *Proposición y valor veritativo*

Ejemplo 1.2
Aquellos enunciados que indican una pregunta, una orden o una exclamación, no son proposiciones. Así tenemos:

(a) *¿Qué edad tienes?* (b) *¡Viva el Perú!* (c) *Prohibido fumar.*

1.2.1. Enunciado Abierto

Un enunciado que usa las palabras "él", "ella" o los símbolos x, y, z, etc. no son proposiciones. Pero si a una de estas palabras y símbolos se le asigna un determinado objeto o valor, llamado constante, el resultado es una proposición. A este tipo de enunciados se les denomina **enunciados abiertos**.

Ejemplo 1.3
Son ejemplos de enunciados abiertos:

(a) "*Él está jugando tenis*" (b) "$x + 2 > 5$" (c) "$2x + 3y = 8.$"

El enunciado abierto "*Él está jugando tenis*" también puede escribirse como: *$p(x)$="x está jugando tenis"*, ahora, si x se reemplaza por el nombre de alguna persona, el enunciado se convierte en una proposición, en posteriores capítulos lo veremos con el nombre de *función proposicional.*

1.2.2. Proposición Simple o Atómica

Una proposición simple es aquel enunciado que posee un solo sujeto y un solo predicado. El valor de verdad V o F de estas dependen del suceso de donde provienen.

Ejemplo 1.4
Los ejemplos de proposiciones atómicas lo encontramos en el cuadro (1.3).

1.2.3. Proposición Compuesta o Molecular

Una proposición compuesta es aquella que está constituida por dos o más proposiciones simples.

El valor de verdad de la proposición compuesta depende del valor de verdad de cada una de las proposiciones componentes.

(1) p : "*El ángulo recto mide* 90°"	$\Rrightarrow$	$v(p) = V$, por los conceptos de la geometría elemental.
(2) q : "*Carlos Marx autor de la Ilíada*"	$\Rrightarrow$	$v(q) = F$, pues, según la historia, Homero es autor de la Ilíada.
(3) r : "7 *es un número primo*"	$\Rrightarrow$	$v(r) = V$, porque la aritmética así lo establece.

Cuadro 1.3: *Determinación de los valores veritativos*

Las proposiciones compuestas resultan ser una agrupación o reunión de proposiciones simples ligadas por ciertas palabras tales como:

y,	o,	si,
entonces,	si y sólo si,	no,
pero,	porque,	sin embargo, etc;

los cuales son llamados ***conectivos lógicos***.

Ejemplo 1.5
Veamos las siguientes proposiciones:

1) *"El terreno es muy fértil y hay suficiente lluvia".*	Es la compuesta de las proposiciones simples: *"**El terreno es muy fértil**"*, y "***Hay suficiente lluvia***".
2) *"La luna no es satélite de la tierra".*	Esta proposición molecular que utiliza el conectivo *"**no**"*, y actúa en una sola proposición atómica: "***La luna es satélite de la tierra***".
3) *"Si estamos en diciembre entonces llegará la navidad".*	Es una compuesta que usa el conectivo "***si ..., entonces***" que actúa sobre las proposiciones simples: "***Estamos en diciembre***", "***Llegará la navidad***".

1.3. Operaciones con proposiciones

Así como en aritmética y en álgebra se estudian operaciones entre números, en lógica se estudian operaciones entre proposiciones. La operación aritmética de suma de dos números 3 y 5, por ejemplo, hace corresponder a un nuevo número 8 que es su suma mediante la igualdad: $3 + 5 = 8$; es decir, escribir "3 + 5" significa lo mismo que escribir "8". Vamos a proceder análogamente para definir las operaciones entre proposiciones.

1.3.1. La Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q, la conjunción es el resultado de componer estas proposiciones con el conectivo lógico "**y**" Se denota por el símbolo " $\wedge$ ", se escribe "$\boldsymbol{p \wedge q}$" y se lee "$\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$".

Ejemplo 1.6
Sean las proposiciones:

$$p: \text{“La tiza es blanca”},$$
$$q: \text{“ 6 es un número primo”}.$$

A partir de estas proposiciones simples obtenemos la nueva proposición uniéndolas mediante la conjunción “*y*”.

$$r : \text{“La tiza es blanca } \mathbf{y} \text{ 6 es un número primo”}.$$

Aquí podemos observar que $v(p) = V$ y $v(q) = F$, entonces $v(r) = F$, ya que la conjunción “y” exige el cumplimiento de ambas componentes, sin excepción. En consecuencia, la regla práctica para conjunciones es:

> La **proposición conjuntiva** es verdadera únicamente cuando las dos proposiciones componentes p y q son verdaderas, en cualquier otro caso es falsa.

Esta característica es válida para toda conjunción y genera su tabla de valores de verdad se observa en el cuadro (1.4).

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Cuadro 1.4: *Valores veritativos de la Conjunción*

Observación 1.1
En la práctica, a la ***proposición conjuntiva*** se le llama simplemente ***conjunción***, lo que se deberá entender como proposición resultante de dos proposiciones atómicas mediante el conectivo “***y***”.

Ejemplo 1.7
Determinar el valor de verdad de la proposición:

$$r : \text{“}2 + 3 + 5 = 11 \quad \text{y} \quad 4 + 8 > 5 + 6\text{”}$$

<u>*Solución*</u>. Sean:

$$\begin{aligned} p &: \text{“}2+3+5 = 11\text{”} \quad \Rightarrow \quad v(p) = F \\ q &: \text{“}4 + 8 > 5 + 6\text{”} \quad \Rightarrow \quad v(q) = V \end{aligned}$$

Luego, según la tabla de verdad de la conjunción:

$$v(r) = v(p \wedge q) = F$$

La Disyunción

Se llama disyunción o suma lógica de las proposiciones $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$, dadas en ese orden, a la proposición que se obtiene enunciando $\boldsymbol{q}$ a continuación de $\boldsymbol{p}$ unidas ambas por el conectivo "**o**", esto es: "$\boldsymbol{p}$ o $\boldsymbol{q}$".

Ejemplo 1.8
La proposición: "La luna es azul o 3 es un número primo" es la disyunción de:

$$\begin{array}{ll} p: \text{"La luna es azul"} & \Rightarrow v(p) = F \\ q: \text{" 3 es un número primo"} & \Rightarrow v(q) = V \end{array}$$

Aquí, podemos decir que la disyunción p o q es verdadera, pues el uso habitual del conectivo "**o**" establece una alternativa: alguna de las dos componentes se cumple. Como es cierto que 3 sea un número primo, no importa que la luna no sea azul, ya que una de las dos componentes de la alternativa es verdadera. En este caso podemos escribir, entonces: $v(p \text{ o } q) = V$.

Dado que la disyunción no contempla los casos en que:

1º) Ambas proposiciones componentes sean verdaderas a mismo tiempo, y

2º) Ambas proposiciones componentes sean falsas a mismo tiempo,

se ha tenido que definir 2 clases de disyunción: **la disyunción inclusiva** (que incluye la posibilidad que sus 2 componentes se cumplan o no se cumplan al mismo tiempo) y **la disyunción exclusiva** (que excluye la posibilidad que ambas se cumplan o no se cumplan a la vez).

1.3.2. La Disyunción Inclusiva

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción inclusiva o débil, es una proposición compuesta que resulta de unir las proposiciones p y q con el conectivo "**o**", el cual se denota por el símbolo " $\vee$ ", se escribe "$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$" y se lee "$\boldsymbol{p}$ **o** $\boldsymbol{q}$". La regla práctica es:

> "La **disyunción inclusiva** de dos proposiciones es falsa si y solo si ambas proposiciones componentes son falsas, resultando verdadera en los demás casos".

Su tabla de verdad es:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cuadro 1.5: *Valores veritativos de la Disyunción Inclusiva*

1.3.3. La Disyunción Exclusiva

En este caso, la palabra "**o**" suele usarse en su sentido excluyente, en cuyo caso la conectiva proposicional se simboliza por $\triangle$, se llama disyunción exclusiva o fuerte, se escribe $\boldsymbol{p \triangle q}$ y se lee "$\boldsymbol{p}$ o $\boldsymbol{q}$ **pero no ambos**", esto es, se da exactamente una de las dos alternativas. En algunos textos a la disyunción exclusiva se le llama *diferencia simétrica*. Para recordar su valor veritativo[1], La regla práctica es:

> "La **disyunción exclusiva** de dos proposiciones es verdadera si y solo si sus 2 proposiciones componentes tienen igual valor veritativo"

Los valores verdad la disyunción exclusiva lo vemos en el cuadro (1.6).

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \triangle q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Cuadro 1.6: *Valores veritativos de la Disyunción Exclusiva*

Observación 1.2
En adelante, llamaremos a la **disyunción inclusiva** simplemente **disyunción**, es decir, pensando en el sentido incluyente "**o**", no olvidemos que, "$\boldsymbol{p \vee q}$" significa "$\boldsymbol{p}$ o $\boldsymbol{q}$ o **ambas a la vez**".

1.3.4. La Negación

Se denomina proposición negativa de la proposición afirmativa "$\boldsymbol{p}$" a otra que se denota por "$\boldsymbol{\sim p}$" y que se lee "**no** $\boldsymbol{p}$" o "**no es cierto que** $\boldsymbol{p}$" y cuya verdad o falsedad queda determinada por la siguiente tabla:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{\sim p}$
V	F
F	V

Cuadro 1.7: *Valores veritativos de la Negación*

El valor de la negación de un enunciado es siempre opuesto del valor de verdad del enunciado. Lo importante de la proposición negativa es que su valor de verdad depende solo del valor de verdad de la afirmación.

a) La tisa es blanca.
b) No es cierto que la tisa es blanca.
c) La tisa no es blanca.
d) La tisa es azul.

[1]Valor veritativo, llámese así al valor de verdad de una proposición.

b) y **c)** son cada uno la negación de **a)**, en cambio **d)** no es la negación de **a)**. Otras formas de expresar la negación es utilizando los términos "**no es el caso que**", "**es falso que**", etc. En estos casos generalmente la negación niega proposiciones compuestas y simbólicamente se expresa por $\sim(\cdots)$.

Ejemplo 1.9
Simbolizar la proposición: "*No es el caso de que* 10 *sea múltiplo de* 3 *o que* $5+2<10$".

Solución. Si p : "10 es múltiplo de 3" y q : "$5+2<10$" , entonces la proposición se simboliza:

$$\sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}).$$

1.3.5. La Condicional o Implicación

Dadas las proposiciones $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$, se denomina **proposición condicional** o **implicativa** a la que resulta de unir $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ por el conectivo "si, ..., entonces" que se denota por el símbolo "$\rightarrow$", se escribe "$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$" y se lee "si $\boldsymbol{p}$, entonces $\boldsymbol{q}$", "$\boldsymbol{p}$ implica $\boldsymbol{q}$", "$\boldsymbol{p}$ sólo si $\boldsymbol{q}$", "$\boldsymbol{q}$, si $\boldsymbol{p}$", etc; en donde $\boldsymbol{p}$ es el antecedente o condición y $\boldsymbol{q}$ es el consecuente o conclusión.

Ejemplo 1.10
Simbolizar la proposición: "Si Patricia consigue visa de turista, entonces viajará a Miami".

Solución.

Si p : "*Patricia consigue visa de turista*"
y q : "*Patricia viajará a Miami*"

Entonces, la proposición se simboliza:

$$p \rightarrow q.$$

Nota: También son conectivos condicionales los términos: "**porque**", "**puesto que**", "**ya que**", "**si**", "**cuando**", "**cada vez que**", etc. Todas se caracterizan porque después de cada uno de estos conectivos está el antecedente o condición.

Ejemplo 1.11
Simbolizar la proposición: " 16 es múltiplo de 2 puesto que 16 es un número par".

Solución.

Sean p : "16 es múltiplo de 2" (*consecuente*), y
q : "16 es número par" (*antecedente*).

Entonces, la proposición se simboliza: $\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p}$, y se expresa:

"*Si* 16 *es un número par, entonces es múltiplo de* 2"

Ejemplo 1.12
"Arturo no viajó a Europa porque perdió sus documentos"

Solución.

Si p : "Arturo no viajó a Europa" (consecuente),
y
q : "Arturo perdió sus documentos" (antecedente)

Se simboliza: $\boldsymbol{q \rightarrow p}$ que expresamos: "Si Arturo perdió sus documentos, entonces no viajó a Europa".

Entonces el valor de verdad de $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ queda establecido de acuerdo a la siguiente regla:

> "La **condicional o implicación** tendrá un valor de verdad **falso** cuando el antecedente $\boldsymbol{p}$ es verdadero y el consecuente $\boldsymbol{q}$ es falso; en los demás casos diremos que $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ es verdadero.".

Los valores veritativos de la condicional lo encontramos en el cuadro (1.8).

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cuadro 1.8: *Valores veritativos de la Condicional*

Ejemplo 1.13
Dadas las proposiciones p, q y r tales que $v(p) = v(q) = F$ y $v(r) = V$, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $p \rightarrow \sim(q \vee r)$ **c)** $\sim(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \wedge p)$
b) $\sim q \rightarrow (\sim p \vee r)$ **d)** $\sim(q \rightarrow \sim r) \rightarrow (\sim p \rightarrow r)$

Solución.

a) $v(q \vee r) = v(F \vee V) = V$
$\Rightarrow$ $v[p \rightarrow (q \vee r)] = F$
$\therefore$ $v[p \rightarrow \sim(q \vee r)] =$
$= v(F \rightarrow F) = V$

c) $v(p \wedge \sim q) = v(F \wedge V) = F$
$\Rightarrow$ $v[\sim(p \wedge \sim q)] = V$;
$v(\sim r \wedge p) = v(F \wedge F) = F$
$\therefore$ $v[\sim(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \wedge p)] =$
$= v(V \rightarrow F) = F$

b) $v(\sim q) = V$ y
$\Rightarrow$ $v(\sim p \vee r) = v(V \vee V) = V$
$\therefore$ $v[\sim q \rightarrow (\sim p \vee r)] = v(V \rightarrow V) = V$

d) $v(q \rightarrow \sim r) = v(F \rightarrow F) = V$
$\Rightarrow$ $v[\sim(q \rightarrow \sim r)] = F$;
$v(\sim p \rightarrow r) = v(V \rightarrow V) = V$.
$\therefore$ $\sim(q \rightarrow \sim r) \rightarrow (\sim p \rightarrow r) = v(F \rightarrow V) = V$

1.3.6. La Bicondicional

Sean $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ dos proposiciones con las que se forma la siguiente proposición: "$p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$". Esta nueva proposición está formada mediante dos implicaciones y una conjunción. Podemos escribir esta proposición haciendo uso de un nuevo conectivo; la escribiremos como:

$$p \leftrightarrow q$$

El símbolo $\leftrightarrow$ es llamado el conectivo bicondicional o doble implicación. A la proposición formada la llamamos **proposición bicondicional**. Si simbolizamos esta proposición obtenemos:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$$

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Cuadro 1.9: *Valores veritativos de la Bicondicional*

La verdad de la bicondicional queda perfectamente determinada a partir de las tablas de verdad de la condicional y la conjunción; esto es:

Concluimos afirmando que el valor de verdad de la proposición bicondicional está dado por la siguiente regla:

> "Si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ tienen el mismo valor de verdad, entonces la **bicondicional** $\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$ es verdadera, y si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ tienen valor de verdad opuestos, entonces $\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$ es falsa."

1.4. Signos de Agrupación

Los signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves) se usan en lógica cuando se trata de obtener esquemas lógicos más complejos con el fin de evitar la ambigüedad de las fórmulas. Así, por ejemplo, la expresión:

$$\boldsymbol{p \vee q \wedge r}$$

es ambigua; pero asociando sus términos:

$$\boldsymbol{(p \vee q) \wedge r} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{p \vee (q \wedge r)}$$

la expresión dada tiene un sentido y deja de ser ambigua.

Otra finalidad de los signos de agrupación es darle mayor o menor jerarquía a los conectivos, En general, "$\sim$", es el conectivo de menor jerarquía, le siguen "$\wedge$", "$\vee$" que son de igual jerarquía, y luego "$\rightarrow$" que es el de mayor jerarquía. Sin embargo, cada conectivo puede ser de mayor jerarquía si así lo indica el signo de colección.

Ejemplo 1.14
"No es el caso de que 9 es múltiplo de 3 o que $2 \times 8 = 15$."

Asignándole una variable a cada proposición simple se tiene:

p : "9 es múltiplo de 3"
q : "$2 \times 8 = 15$"

Su notación simbólica es: $\sim(p \vee q)$.

Nótese que aquí que la negación afecta a las variables dentro del paréntesis.

Ejemplo 1.15
Simbolizar: "*Si el testigo no dice la verdad, entonces Juan es inocente o culpable.*"

Si $\boldsymbol{p}$: "*El testigo dice la verdad*", $\boldsymbol{q}$: "Juan es inocente" y $\boldsymbol{r}$:"*Juan es culpable*"; entonces se simboliza:

$$\sim\boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r})$$

Aquí, el símbolo de mayor jerarquía es "$\rightarrow$". Obsérvese que "$\sim$" solo afecta a la variable "$\boldsymbol{p}$" y que "$\vee$" está limitado por el paréntesis.

Definición 1.1 (Esquema molecular)
La combinación de las variables y los operadores o conectivos proposicionales por medio de los signos de los signos de agrupación se denomina *esquema molecular*. En cada esquema molecular solo uno de los operadores es el de mayor jerarquía y es el que le da nombre a dicho esquema. Por ejemplo, en los esquemas moleculares:

$$A = \sim p \rightarrow (q \vee r) \; ; \quad B = [(p \wedge q) \vee \sim r] \leftrightarrow p \; ; \quad C = \sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee r)]$$

Podemos notar que los operadores de mayor jerarquía en A, B y C son: "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" y "$\sim$", y los nombres que llevan cada uno de estos esquemas son: *esquema condicional*, *esquema bicondicional* y *esquema negativo*, respectivamente.

1.5. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1.1
Para los siguientes enunciados:

(1) "*Recoge ese lápiz*" (3) "$x - y = 5$"
(2) "$2 + 5 < 6$" (4) "*Hace mucho frío*"

¿Cuál de alternativas siguientes es la correcta?

a) Dos son proposiciones b) Dos son enunciados abiertos
c) Dos no son ni proposiciones ni enunciados abiertos d) Tres son proposiciones

<u>*Solución*</u>.

(1) "*Recoge ese lápiz*", es un mandato que no tiene un valor de verdad, entonces, no es proposición ni enunciado abierto.
(2) "$3 + 5 < 6$" , es una proposición cuyo valor de verdad es F.
(3) "$x - y = 5$" , es un enunciado abierto.
(4) "*Hace mucho frío*", es una oración que no tiene un valor de verdad, luego, no es proposición ni enunciado abierto.

En consecuencia, (1) y (4) satisfacen la alternativa (c).

Ejercicio 1.2
Dadas las proposiciones: $\boldsymbol{p}$: "Marcos es comerciante", $\boldsymbol{q}$: "Marcos es un próspero industrial" y $\boldsymbol{r}$: "Marcos es ingeniero". Simbolizar el enunciado: "Si no es el caso que Marcos sea un comerciante y un próspero industrial, entonces es ingeniero o no es comerciante".

<u>*Solución*</u>.
La proposición: "*No es el caso que Marcos sea un comerciante y próspero industrial*", se simboliza:

$$\sim(p \wedge q)$$

La proposición: "*Marcos es ingeniero o no es comerciante*", se simboliza:

$$(r \vee \sim p)$$

Uniendo estos dos esquemas con el conectivo "$\rightarrow$", se tiene:

$$\sim(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim p).$$

Ejercicio 1.3
Dadas las proposiciones **q**: "4 es un número impar", **p** y **r** cualesquiera tal que $\sim[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p)]$ es verdadera. Hallar el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares:

$$A = r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)\,; \quad B = [r \leftrightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow (q \wedge \sim p)\,; \quad C = (r \vee \sim p) \wedge (q \vee p)$$

Solución.

- Si $\boldsymbol{q}$: "4 es un número impar" $\Rightarrow v(q) = F$
- Por dato: $\sim[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p)] \equiv V$ entonces: $v[(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p)) = F$.
- Según la tabla de verdad de la condicional: $v(r \vee q) = V$ y $v(r \rightarrow p) = F$.
- También por la condicional, si $v(r \rightarrow p) = F$, entonces: $v(r) = V$ y $v(p) = F$
- Sustituyendo estos valores de verdad en los esquemas moleculares se tiene:

$$\begin{aligned}
&v(A) = V \rightarrow (V \vee V) \equiv V;\\
&v(B) = [V \leftrightarrow (F \wedge F)] \leftrightarrow (F \wedge V) \equiv [F] \leftrightarrow (F) \equiv V\\
&v(C) = (V \vee V) \wedge (F \vee F) \equiv (V) \wedge (F) \equiv F
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.4
De la falsedad de la proposición: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ se deduce que el valor de verdad de los esquemas moleculares:

$$A = (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q\,; \quad B = [(\sim r \vee q)] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]\,; \quad C = (p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$$

son respectivamente:

a) VFV b) FFF c) VVV d) FFV

Solución.
Según la disyunción inclusiva, si: $v[(p \rightarrow q) \vee (\sim r \rightarrow s)] = F$, entonces:

$$v(p \rightarrow \sim q) = F \quad , \quad v(\sim r \rightarrow s) = F$$

Aplicando la condicional en ambos casos se tiene:

$$v(p \rightarrow \vee q) = F \quad \Rightarrow \quad v(p) = V \ , \ v(q) = V;$$

$$v(\sim r \rightarrow s) = F \quad \Rightarrow \quad v(r) = F \ , \ v(s) = F$$

Entonces:

$$V(A) = (F \wedge F) \vee (F) = (F) \vee (F) = F$$
$$V(B) = (V \vee V) \wedge V] \leftrightarrow [(F \vee F) \wedge F] = (V) \leftrightarrow (F) = F$$
$$V(C) = (V \to V) \to [(V \vee V) \wedge F] = (V) \to [F] = F$$

Por lo tanto, la alternativa correcta es la b).

Ejercicio 1.5

En cuales de los siguientes casos es suficiente la información para conocer el valor de verdad de las proposiciones correspondientes.

$A = (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$; $v(q) = V$. $B = (p \wedge q) \to (p \vee r)$; $v(p) = V$ y $v(r) = F$.
$C = [p \wedge (q \to r)]$; $v(p \to r) = V$. $D = (p \to q) \to r$; $v(r) = V$

Solución.

- ◇ En A: Si $v(q) = V$, entonces $v(A) = (p \vee V) \leftrightarrow (\sim p \wedge F)$, pero: $v(p \vee V) = V$ y $v(\sim p \wedge F) = F$, cualquiera sea el valor de verdad de p. Luego, $v(A) = (V) \leftrightarrow (F) = F$ $\therefore$ Es suficiente la información.
- ◇ En B: Si $v(p) = V$; y $V(r) = F$, entonces $v(B) = (V \wedge q) \to (V \vee F) = (V \wedge q) \to (V)$. Cualquiera sea el valor de verdad de $(V \to q)$, la condicional p es verdadera, $\therefore$ Es suficiente la información dada.
- ◇ En C: Según la tabla de la condicional, existen tres posibilidades para que el $v(p \to r) = V$. $\therefore$ No es suficiente la información dada para conocer el valor de verdad de C.
- ◇ En D: Si $v(r) = V$, entonces $(p \to q) \to V$. Cualquiera sea el valor de verdad de $(p \to q)$, la condicional es verdadera, $\therefore$ Es suficiente la información dada.

Ejercicio 1.6

Definamos $p \sharp q$ como una operación verdadera si p es falsa y q verdadera, y como falsa en todos los casos restantes. Según esto, si r:"Juan es médico" y s:"Juan es deportista"; hallar la traducción de $\sim r \sharp s$.

Solución.

- ◇ Según la definición de $\sharp$, las tablas de verdad de $p \sharp q$ y $\sim r \sharp s$ son:

p	q	$p \sharp q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

$\sim r$	s	$\sim r \sharp s$
F	V	V
F	F	F
V	V	F
V	F	F

- ◇ Vemos que la tabla del valor de verdad de la derecha es idéntica a la de la conjunción, es decir $\sim r \sharp s$ es igual a escribir: $r \wedge s$ por tanto, la traducción es $\sim r \sharp s$ es:

"Juan es médico y deportista."

1.6. Ejercicios Propuestos

1. De los enunciados siguientes:

1. "Hola que tal"	2. $x^2 + 1 < 10$
3. $2 + 5 > 6$	4. "Todos los hombres son inmortales"
5. "Sócrates nació en Atenas"	6. $x + 5 \neq 8$

¿Cuál de las alternativas siguientes es correcta?

a) son enunciados abiertos	b) son proposiciones
c) no son proposiciones	d) son proposiciones

2. Simbolizar en cada una de las siguientes proposiciones en los espacios en blanco, utilizando variables proposicionales y conectivos lógicos. Luego determinar el valor de verdad de cada una de ellas.

$$p\,:\,5+3>7; \qquad q\,:\,5+3=7; \qquad r\,:\,5=4$$

i) $5 + 3 \geq 7$ ____________________
ii) $5 + 3 > 7$, pero $5 + 3 = 7$ ____________________
iii) $5 + 3 = 7$, si y solo si $5 = 4$ ____________________
iv) si $5 + 3$ y $5 = 4$, entonces $5 + 3 > 7$ ____________________

3. Si p : "Carlos vendrá", q : "Carlos a recibido la carta" y r : "Carlos está interesado todavía en el asunto". Simbolizar los siguientes enunciados:

   a) "Carlos vendrá, si ha recibido la carta, siempre que esté interesado todavía en el asunto".

   b) "Carlos vendrá porque ha recibido la carta o no está interesado todavía en el asunto".

   c) "Carlos vendrá si y sólo si ha recibido la carta o vendrá porque está interesado todavía en el asunto".

4. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

p : "$(3+5=8) \vee (5-3=4)$"	q : "$(5-3=8) \rightarrow (1-7=6)$"
r : "$(3+8=11) \wedge (7-4>1)$"	s : "$(4+6=9) \leftrightarrow (5-2=4)$"

5. $\sim[(\sim p \wedge q) \vee (r \rightarrow q)] \wedge [(\sim p \vee q) \rightarrow (q \wedge \sim p)]$, es verdadera. Hallar los valores de verdad de p, q y r.

6. De la falsedad de $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow \sim s)$, se deduce que el valor de verdad de los esquemas: $A = \sim(\sim q \vee \sim s) \rightarrow \sim p$; $B = \sim(\sim r \wedge s) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$ y $C = p \rightarrow \sim[q \rightarrow \sim(s \rightarrow r)]$, son respectivamente:

   a) FFV b) FFF c) FVF d) FVV

7. La proposición $(p \wedge \sim r) \rightarrow (q \rightarrow r)$ es falsa, y se tienen los esquemas moleculares:

$$A = \sim(q \vee r) \vee (p \vee q)\ , \qquad B = (p \vee \sim q) \rightarrow (\sim r \wedge q) \quad \text{y}$$
$$C = [(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)] \leftrightarrow (p \vee \sim r).$$

¿Cuáles son falsos?

8. Si lo proposición $A = (p \to \sim q) \to (r \to \sim s)$ es falsa, hallar el valor de verdad de las proposiciones q, p, r y s.(en este orden).

9. Dadas las proposiciones:

$$A = (p \to q) \to r; \;\; v(r) = V \qquad B = (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q);\; v(q) = V$$
$$C = (p \wedge q) \to (p \wedge r);\; v(p) = V \text{ y } v(r) = F \qquad D = p \wedge (q \to r);\; v(r) = V.$$

¿En qué casos la información qué se da es suficiente para determinar el valor de verdad de cada proposición?

10. $(p \vee q) \leftrightarrow (r \vee s)$ es una proposición verdadera, teniendo r y s valores de verdad opuestos. De las afirmaciones siguientes cuáles son verdaderas: $A = [(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge s)] \wedge p$, es verdadera

    $B = [\sim(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$, es falsa

    $C = [(\sim r \wedge \sim s) \to (p \vee r) \wedge \sim(r \wedge s)$, es verdadera.

11. Si la proposición $(\sim p \wedge q) \to (\sim s \vee r)$ es falsa, de las proposiciones siguientes, cuáles son verdaderas?:

    $A = \sim[(p \to q) \to r]; \qquad B = \sim(\sim p \wedge q) \wedge (\sim r \vee r) \wedge s; \qquad C = [(p \vee \sim q) \wedge p] \vee (\sim q).$

12. Si las proposiciones $A = (p \leftrightarrow \sim s) \leftrightarrow \sim s$ y $B = [(p \to s) \triangle \sim p] \triangle s$, son verdaderas, hallar los valores de verdad de p, s y $p \triangle s$, en ese orden.

13. Dada la siguiente información: $v(r \to q) = V$; $v(n \wedge r) = F$; $v(m \vee n) = V$ y $v(p \vee m) = F$. Determinar el valor de verdad del esquema molecular: $A = [(m \vee \sim n) \to (p \wedge \sim r)] \leftrightarrow (m \wedge q)$.

14. Si $A = (p \leftrightarrow r) \wedge \sim(\sim p \vee \sim q)$, es verdadera, hallar el valor de verdad de la proposición $B = (p \to q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

15. Si $v[(q \to p) \to (r \vee p)) = F$; hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

    $$A = (p \wedge x) \to (m \leftrightarrow y); \qquad B = (q \to n) \vee (x \wedge y); \qquad C = (r \leftrightarrow p) \to (s \wedge q)$$

16. Si $v(m \leftrightarrow n) = F$, $v[\sim(s \to r)] = F$ y $v(\sim p \wedge \sim q) = F$; hallar el valor de verdad del esquema $A = [(p \vee q) \to (s \wedge \sim r)] \wedge (n \leftrightarrow m)$.

17. Sabiendo que el valor de verdad de la proposición compuesta: $A = \sim[(p \wedge r) \to q] \wedge [(p \vee q) \triangle s] \to (s \triangle p) \to t$, es siempre falso. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

    a) $B = [(\sim p \triangle q) \triangle r] \to \sim(q \to (s \to p)) \triangle (p \triangle q)$

    b) $C = \sim(p \to q) \triangle [(r \wedge p) \to \sim(r \vee s)] \triangle t$

18. Si ***p, q, r, s*** y ***w*** son proposiciones cualesquiera tales que: $v(\sim w \to \sim s) = F$ y $v[(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \to u)] = V$; hallar el valor de verdad de los siguientes esquemas:

    $A = [(p \wedge q) \vee r] \vee s \;\; ; \qquad B = (s \leftrightarrow \sim w) \to (r \vee \sim p)$ y

    $C = [t \to (\sim w \vee \sim p)] \vee \sim(p \to r)$

19. Dadas las proposiciones:

    p : "Los números m y n son múltiplos enteros de 5."
    q : "El producto de los números m y n es un múltiplo entero de 5."

    Analizar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderos:

    a) p es condición suficiente para q. b) p sólo si q. c) p es condición necesaria para q.

20. Si la proposición $P = (\sim p \to q) \vee (s \to \sim r)$ es falsa; cuáles de los siguientes esquemas moleculares son falsos:

    $A = [(r \to q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$;

    $B = \sim(p \vee q) \vee \sim q$; $C = \sim[(p \vee q) \wedge \sim q] \to \sim(p \to q)$.

1.7. Evaluación de Esquemas Moleculares mediante Tabla de Valores

Consiste en obtener los valores del operador principal a partir de la validez de cada una de las variables proposicionales. Hemos visto que para evaluar una tabla de verdad de dos variables proposicionales se necesitan $2^2 = 4$ valores de verdad (filas) para cada variable. En general, el número de valores de verdad que se asigna a cada variable resulta de aplicar la fórmula 2^n, siendo n el número de variables que hay en el esquema molecular. Las combinaciones de todas las posibilidades de V y F se hacen en las columnas de referencia al margen izquierdo del esquema, luego se procede a aplicar la regla a cada uno de los operadores, empezando por el de menor alcance, hasta llegar al de mayor jerarquía.

1.7.1. Jerarquía de los conectivos

La siguiente tabla enuncia los conectivos en orden de mayor a menor jerarquía de arriba hacia abajo.

Mayor	$\leftrightarrow$
	$\to$
$\vdots$	$\vee$
	$\wedge$
menor	$\sim$

Ejemplo 1.16
Evaluar la tabla de verdad del esquema molecular:

$$A = \sim(p \wedge q) \leftrightarrow [\sim p \vee \sim q]$$

<u>Solución</u>.

Número de valores de verdad para cada variable: $2^2 = 4$.

p	q	$\sim$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p)$	$\vee$	$(\sim q)$
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
	pasos $\to$	2	1	6	3	5	4

Explicación de los pasos:

1°) Se aplicó la conjunción a los valores de verdad de p y q.

2°) Se aplicó la negación a la columna (1).

3°) Se aplicó la negación a los valores de verdad de p.

4°) Se aplicó la negación a los valores de verdad de q.

5°) Se aplicó la disyunción inclusivo a los valores de verdad de las columnas 3 y 4.

6°) Finalmente se aplicó la bicondicional a los valores de verdad de las columnas 2 y 5.

En este ejemplo, el operador de mayor alcance es el bicondicional "$\leftrightarrow$", cuya columna (todos V) se ha trazado con doble raya para facilitar la lectura final del resultado de la tabla de valores. En el resto de los ejemplos, se obviará la explicación de los pasos.

Ejemplo 1.17
Evaluar la tabla de verdad de la proposición:

$$A = \sim[p \to (p \vee q)]$$

<u>Solución</u>.

Número de valores de verdad para cada variable: $2^2 = 4$

p	q	$\sim$	$[p$	$\to$	$(p \vee q)]$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F
pasos $\to$		4	1	3	2

Ejemplo 1.18
Evaluar la tabla de verdad de la proposición:

$$[(\sim p \wedge \sim q) \to \sim r] \leftrightarrow \sim p \vee [r \triangle (\sim p \wedge \sim q)]$$

<u>Solución</u>.

Número de valores de verdad para cada variable: $2^3 = 8$

p	q	r	$[(\sim p \wedge \sim q)$	$\to$	$\sim r]$	$\leftrightarrow$	$\sim p$	$\vee$	$[r$	$\triangle$	$(\sim p \wedge \sim q)]$
V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	V
		pasos $\to$	1	3	2	9	4	8	5	7	6

1.7.2. Tautología, Contradicción y contingencia

Según el resultado que se obtenga en el operador de mayor jerarquía, los esquemas moleculares se clasifican en contingentes (consistentes), tautológicos y contradictorios.

- ◇ Un esquema molecular es **tautológico** cuando los valores de verdad de su operador principal son todos verdaderos (ejemplo 1.16).
- ◇ Un esquema molecular es **contradictorio** cuando en el resultado todos los valores de verdad son falsos (ejemplo 1.17).
- ◇ Un esquema molecular es **contingente** cuando en su resultado hay por lo menos una verdad y una falsedad (ejemplo 1.18).

1.8. Proposiciones Equivalentes

Dos proposiciones compuestas p y q se dicen que son equivalentes si unidas por el bicondicional $\leftrightarrow$ el resultado es una tautología, es decir, que p y q tienen los mismos valores de verdad en su operador principal. Se escribe:

$$P \equiv Q \qquad \text{ó} \qquad P \leftrightarrow Q$$

y se lee "P es equivalente a Q" ó "Q es equivalente a P." Si P no es equivalente a Q, se escribe:

$$P \not\leftrightarrow Q \quad \text{ó} \quad P \not\equiv Q$$

Ejemplo 1.19
Determinar si las proposiciones siguientes son equivalentes:

P : "Si Juan aprobó los exámenes de admisión, ingresó a la universidad".
Q : "No es el caso que Juan apruebe los exámenes de admisión y no ingrese a la universidad".

<u>*Solución*</u>.

Sean las proposiciones simples:

p : "*Juan aprobó los exámenes*",
q : "*Juan ingresó a la Universidad*";

entonces:
$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$

y para probar que esta bicondicional es verdadera construimos su tabla de verdad.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$\sim(p \wedge \sim q)$	
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F
pasos $\rightarrow$		1	4	3	2

Dado que el resultado de la tabla es una tautología, las proposiciones P y Q son equivalentes.

Ejemplo 1.20
Determinar si los esquemas $A = (p \to q) \vee (r \wedge p)$ y $B = \sim q \to (\sim r \to \sim p)$ *son equivalentes.*

Construimos las tablas de verdad de A y B unidas por el operador "$\leftrightarrow$"

p	q	r	$(p \to q)$	$\vee$	$(r \wedge p)$	$\leftrightarrow$	$\sim q$	$\to$	$(\sim r \to \sim p)$
V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V
pasos $\to$			1	3	2	7	4	6	5

vemos que las columnas 3 y 6, que corresponden a los operadores principales de A y B, respectivamente, son iguales; entonces, el resultado de unir estos dos columnas por el operador $\leftrightarrow$ es tautológico, por lo que, A y B son equivalentes.

Ejemplo 1.21
De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son equivalentes?

$A =$ "Es necesario que Juan no estudie en la Universidad de Lima para que Luis viva en Monterrico",
$B =$ "No es cierto que Luis viva en Monterrico y que Juan estudie en la Universidad de Lima",
$C =$ "Luis no vive en Monterrico y Juan no Estudia en la Universidad de Lima".

Solución.
Sean: p : "Juan estudia en la Universidad de Lima", q : "Luis vive en Monterrico". Entonces:

$$A = q \to \sim p \quad ; \quad B = \sim(q \wedge p) \quad ; \quad C = \sim q \wedge \sim p$$

p	q	$q \to \sim p$	$\leftrightarrow$	$\sim$	$(q \wedge p)$	$\leftrightarrow$	$\sim q \wedge \sim p$
V	V	F	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V
pasos $\to$		1		3	2		4

Aquí observamos que solo las columnas 1 y 3 de los operadores principales de las proposiciones A y B son iguales, por lo tanto, éstas son equivalentes, esto es:

$$A \equiv B \quad , \quad A \not\equiv C \quad y \quad B \not\equiv C$$

1.9. Proposiciones Implicativas

Se dice que una proposición A,implica a otra proposición B, cuando unidas por el condicional “$\sim$”, resulta una tautología. Se simboliza:

$$A \rightarrow B$$

y se ’lee; “A implica a B”, o también, “A es condición suficiente para que B” o “B es condición necesaria para A”. Si A no implica a B, se escribe; $A \nrightarrow B$

Ejemplo 1.22
Sean los esquemas moleculares: $A = (\sim p) \triangle (\sim r)$ y $B = \sim(p \wedge q) \vee \sim r$. Demostrar que A implica a B.

<u>*Solución*</u>. En efecto, construyamos la tabla de verdad de $A \rightarrow B$;

p	q	r	$\sim p \triangle \sim r$	$\rightarrow$	$\sim$	$(p \wedge q)$	$\vee$	$\sim r$
V	V	V	F	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V	F	V	V
pasos $\rightarrow$			1	6	4	3	5	2

Como el resultado arroja una tautología, queda demostrado que $A \rightarrow B$.

1.10. Ejercicios Propuestos

En los ejercicios del 1 al 12 establecer, por medio de una tabla de valores, si cada uno de los siguientes esquemas moleculares es contingente, tautológico o contradictorio.

1. $\sim[\sim p \rightarrow \sim(\sim q \sim p)] \vee \sim(\sim q \vee \sim q)$
2. $[(p \vee \sim q) \wedge \sim p] \triangle \sim(\sim q \rightarrow p)$
3. $[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \vee \sim q)$
4. $(p \vee (q \rightarrow \sim r) \wedge [(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q)$
5. $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(\sim q \rightarrow \sim p)$
6. $[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow [r \wedge \sim(p \vee \sim q)]$
7. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q]$
8. $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$
9. $[p \wedge (\sim q \rightarrow p)] \wedge \sim[(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \vee \sim p)]$
10. $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$
11. $[(p \triangle \sim q) \wedge \sim(r \wedge q)] \leftrightarrow \sim[(p \triangle \sim q) \rightarrow (q \wedge r)]$
12. $\{[(\sim p \wedge r) \rightarrow q] \leftrightarrow [\sim q \leftrightarrow (p \vee r)]\} \triangle \{(p \leftrightarrow q) \triangle (q \vee \sim r)\}$.
13. Afirmamos que:

    A: “Hoy es lunes pero no martes, entonces hoy no es feriado” $\leftrightarrow$ “.Hoy es feriado, entonces no es verdad que hoy es lunes y no es martes”.

    B: “Hoy es lunes o martes, si y sólo si, hoy no es lunes” $\leftrightarrow$ “.Hoy no es lunes y hoy es martes”.

C: "Hoy es feriado y no es martes, entonces hoy es martes" $\leftrightarrow$ ".Hoy no es martes, entonces hoy es feriado".

¿Cuáles son verdaderas?

14. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

    (1) Es necesario y suficiente que p y q sean falsos para que: $\sim(p \wedge r) \rightarrow (q \vee \sim r)$ sea falsa.

    (2) Es necesario que q sea falsa y r verdadera para que: $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \vee \sim p)$ sea falsa.

    (3) No es necesario que p y q sean verdaderas para que: $\sim(p \triangle q) \vee (\sim p \triangle \sim q)$ sea verdadera.

15. Dados los esquemas lógicos: $p = (p \rightarrow q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$; $R = \sim(\sim p \leftrightarrow q)$; $Q = \sim(p \vee \sim q)$. ¿Cuál de las siguientes relaciones es correcta?

    a) $P \equiv R$ b) $R \equiv Q$ c) $P \equiv R$ d) Ninguna.

16. Si se sabe que: $p \star q \equiv (p \rightarrow \sim q)$ y $p \sharp q \equiv \sim p \wedge \sim q$, evaluar el esquema molecular $A = (p \rightarrow r) \sharp (q \star r)$.

17. Si definimos el conectivo $\triangle$ como: $p \triangle q = (p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge r) \wedge \sim q]$, donde r es una proposición cualquiera. Analizar cuales de las siguientes afirmaciones son correctas.

    a) $p \triangle p$ es una contradicción b) $p \triangle q = q \triangle p$
    b) $q \triangle t = q \wedge \sim t$ d) $p \triangle \sim q = p \wedge (\sim p \wedge q)$

18. Dada la siguiente información:

    $$p \star q = (\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim q \leftrightarrow p) \quad ; \quad p \sharp q = (\sim p \leftrightarrow q) \vee (\sim q \rightarrow p)$$

    Evaluar la fórmula: $[(p \star q) \wedge (q \sim r)] \rightarrow (\sim p \sharp q)$.

19. Dados los siguientes esquemas moleculares: $A = p \triangle (\sim q)$, $B = p \rightarrow \sim r$ y $C = \sim(q \wedge \sim r)$. Determinar:

    a) Si la conjunción de A y C implica a B
    b) Si la disyunción de A y B implica a C.

20. Determinar si cada una de las proposiciones que aparecen a continuación implica a $K = \sim(p \wedge q) \vee \sim r$.

    $$A = p \leftrightarrow \sim(q \wedge r); \qquad B = (q \wedge \sim r); \qquad C = (\sim p) \triangle (\sim r)$$

1.11. Inferencia Lógica

En matemáticas llamamos razonamiento a un par ordenado $(\{p_i\}, q)$, en donde, $\{p_i\}$ es un conjunto finito de proposiciones, llamadas **premisas** y q una proposición, llamada **conclusión**. Un razonamiento es deductivo si y sólo si las premisas son evidencias de la verdad de la conclusión, es decir, si $p_1, p_2, \dots, p_n$ son verdaderas entonces q es verdadera; cuando se deduce esto se dice que se ha construido una inferencia. De este modo, toda regla de inferencia es tautológica. Una inferencia es válida si y sólo si la premisa p o conjunción del conjunto de premisas $\{p_i\}$ implica la conclusión q, esto es, si:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \, \dots \, \wedge p_n) \rightarrow q \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.23
Determinar si $p \vee q$ es una consecuencia válida de: $\sim p \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow r$, $\sim r$.

<u>*Solución*</u>.

Aquí las premisas son: $p_1 = \sim p \rightarrow \sim q$, $p_2 = \sim q \rightarrow r$, $p = \sim r$, y la conclusión: $Q = p \vee q$. Debemos demostrar que: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow Q$, es una tautología. En efecto, la tabla de verdad para esta inferencia es: Como el resultado (7) es una tautología, la conjunción de premisas implica a la

p	q	r	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\wedge$	$\sim q \rightarrow \sim r$	$\wedge$	$\sim r$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	V	V	F
		pasos $\rightarrow$	1	3	2	5	4	7	6

Cuadro 1.10: *Proposiciones Implicativas*

conclusión, por tanto, la inferencia es válida.

Observación 1.3
Debemos considerar lo siguiente en las proposiciones implicativas.

(1) La validez de una inferencia no depende de los valores de verdad ni del contenido de los enunciados que aparecen en la inferencia, sino de la forma particular de la inferencia.

(2) Cuando las premisas forman dos o más conjunciones, se toma la última conjunción como la principal del antecedente.

(3) Si la condicional (1.1) no es una tautología, entonces se dice que la **inferencia** es **no válida** o es una **falacia**.

Ejemplo 1.24
Determinar la validez de la inferencia:

"*Si el triángulo es Isósceles entonces tiene dos lados iguales. Pero, el triángulo no tiene dos lados iguales; por lo tanto, no es isósceles*".

Solución.

Sean:

$$\begin{aligned} p &: \text{“El triángulo es isósceles”} \\ q &: \text{“El triángulo tiene dos lados iguales”} \end{aligned}$$

Entonces, el esquema de la inferencia es:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

p	q	$p \to q$	$\wedge$	$\sim q$	$\to$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
	pasos $\to$	1	3	2	5	4

Como el resultado de la tabla de verdad es una tautología, la inferencia es válida. □

Ejemplo 1.25

Mediante una tabla de verdad, establecer si es válida la inferencia:

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow \sim q \\ q \vee r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

Solución.

Desarrollando la tabla de verdad:

p	q	r	$p \leftrightarrow \sim q$	$\wedge$	$q \vee r$	$\wedge$	$\sim r$	$\to$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F	F	V	F
V	V	F	F	F	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V	V
		pasos $\to$	1	3	2	5	4	7	6

El resultado de la tabla no es una tautología, por lo tanto, la inferencia es una falacia. □

1.12. Principales leyes tautológicas

Una forma proposicional es una ley lógica si y sólo si cualquiera que sea la interpretación formalmente correcta que se haga de la misma, se obtiene como resultado una verdad lógica. En lógica, las tautologías son conocidas con el nombre de leyes o principios lógicos y son las siguientes:

T.1: Ley de Identidad (Reflexividad)
Una proposición sólo es idéntica a si misma. Se expresa por:

$$\boldsymbol{p \rightarrow p} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{p \leftrightarrow p}$$

T.2: Ley de no Contradicción
Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez. Se expresa por:

$$\boldsymbol{\sim(p \wedge \sim p)}$$

T.3: Ley del Tercio Excluido
Una proposición es verdadera o es falsa, no hay una tercera posibilidad. Se expresa por:

$$\boldsymbol{p \vee \sim p}$$

Existen muchas otras tautologías igualmente importantes y que se clasifican en dos grupos: las tautologías llamadas **equivalencias notables** y las llamadas **implicaciones notables**.

1.12.1. Equivalencias Notables

E.1: Ley de Involución
Dos negaciones de igual alcance equivale a una afirmación.

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

E.2: La Idempotencia
Una cadena de conjunciones o disyunciones de variable redundante se eliminan.

a) $p \wedge p \equiv p$
b) $p \vee p \equiv p$

E.2: Leyes conmutativas .. **PRÓXIMAMENTE LA II PARTE**

PRÓXIMAMENTE LA II PARTE..

Bibliografía

[Figuroa, 1995] Figueroa García, Rubén. *Matemática Básica*, Editorial America S.R.L., Lima, Perú, 1995.