PRECÁLCULO

VALOR ABSOLUTO

CUADERNO DE TRABAJO

Definición, Distancia y Propiedades

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Valor Absoluto

El valor absoluto es una de las herramientas más potentes del precálculo. Actúa como un operador que garantiza la no negatividad de una expresión, lo cual es fundamental para medir distancias, márgenes de error y tolerancias en el mundo real.

Para cualquier número real x, su valor absoluto se denota por $|x|$ y se define como:

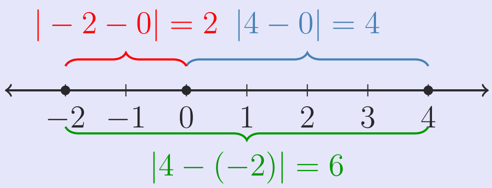
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Advertencia Importante: Si x es negativo ($x < 0$), entonces $-x$ es **positivo**. Por lo tanto, el resultado del valor absoluto siempre es mayor o igual a cero ($|x| \geq 0$).

COMENTARIO

¡Hola a todos! El valor absoluto no es simplemente "quitarle el signo menos". Esa es una trampa. Es una función partida que analiza el signo interior. ¡Mucha atención a la definición!

En la recta numérica real, $|x|$ representa la distancia desde el número x hasta el origen 0. Más generalmente, la expresión $|x - a|$ representa la **distancia geométrica** entre los puntos x y a.



Sean $a, b \in \mathbb{R}$:

- **No negatividad:** $|a| \geq 0$ y $|a| = 0 \iff a = 0$.
- **Simetría:** $|a| = |-a|$ y $|a-b| = |b-a|$.
- **Multiplicación y División:** $|ab| = |a||b|$ y $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (si $b \neq 0$).
- **Relación con la Raíz Cuadrada:** $\sqrt{x^2} = |x|$. (¡Regla de oro!)
- **Desigualdad Triangular:** $|a+b| \leq |a| + |b|$.

COMENTARIO

Nunca olviden que $\sqrt{x^2} = |x|$. Si cancelan la raíz con el cuadrado y dejan solo x, estarán perdiendo la mitad de las soluciones en una ecuación.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1

Enunciado: Resuelva la ecuación $|2x-5|=9$.
Solución: Por definición, la expresión interior puede ser 9 o -9.
Caso 1: $2x-5=9 \implies 2x=14 \implies x=7$.
Caso 2: $2x-5=-9 \implies 2x=-4 \implies x=-2$.
Conjunto Solución: $CS=\{-2,7\}$.

····▷ COMENTARIO
Siempre abran los dos casos para las ecuaciones con valor absoluto. Un solo valor de distancia puede alcanzarse por la derecha o por la izquierda.

Problema Resuelto 2

Enunciado: Resuelva $|3x-1|=|x+5|$.
Solución: Cuando ambos lados tienen valor absoluto, igualamos directamente y con signo opuesto.
Caso 1: $3x-1=x+5 \implies 2x=6 \implies x=3$.
Caso 2: $3x-1=-(x+5) \implies 3x-1=-x-5 \implies 4x=-4 \implies x=-1$.
Conjunto Solución: $CS=\{-1,3\}$.

Problema Resuelto 3

Enunciado: Resuelva la ecuación $|x^2-4|=-2x+4$.
Solución: Condición de existencia: el lado derecho debe ser ≥ 0.
$-2x+4\geq 0 \implies 2x\leq 4 \implies x\leq 2$.
Resolvemos los casos:
Caso 1: $x^2-4=-2x+4 \implies x^2+2x-8=0 \implies (x+4)(x-2)=0 \implies x=-4, x=2$.
Caso 2: $x^2-4=-(-2x+4) \implies x^2-4=2x-4 \implies x^2-2x=0 \implies x(x-2)=0 \implies x=0, x=2$.
Verificando con la restricción $x\leq 2$: Todos cumplen. $CS=\{-4,0,2\}$.

····▷ COMENTARIO
¡Ojo aquí! Si el valor absoluto está igualado a una expresión con variables, ESA expresión debe ser obligatoriamente positiva o cero. Si omiten esto, incluirán raíces extrañas.

Problema Resuelto 4

Enunciado: Simplifique la expresión $E=|x-4|+|x+3|$ sabiendo que $x\in\langle -2,2\rangle$.
Solución: Analizamos el signo de cada interior en el intervalo dado.
Para $-2<x<2$:
El valor máximo de x es casi 2, así que $x-4$ será siempre negativo. Por tanto, $|x-4|=-(x-4)=-x+4$.
El valor mínimo de x es casi -2, así que $x+3$ será siempre positivo. Por tanto, $|x+3|=x+3$.
Sumamos: $E=(-x+4)+(x+3)=7$.

Problema Resuelto 5

Enunciado: Resuelva la ecuación anidada $\big||x-2|-3\big| = 5$.
Solución: Abrimos el valor absoluto exterior:
Caso A: $|x-2|-3 = 5 \implies |x-2| = 8$.
A1: $x-2 = 8 \implies x = 10$.
A2: $x-2 = -8 \implies x = -6$.
Caso B: $|x-2|-3 = -5 \implies |x-2| = -2$.
El valor absoluto no puede ser negativo, así que este caso no tiene solución real.
Conjunto Solución: $CS = \{-6, 10\}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Tolerancia de Fabricación

Contexto: Un engranaje para maquinaria debe medir 50 mm de diámetro. La máquina permite un error máximo de 0.2 mm. Modele esta situación usando valor absoluto.
Solución: Si x es la medida real, la diferencia entre x y el ideal 50 no debe exceder 0.2. Matemáticamente es la distancia: $|x - 50| \leq 0{,}2$.

COMENTARIO
Las tolerancias industriales son la aplicación estrella del valor absoluto. La estructura siempre es $|\text{Real} - \text{Ideal}| \leq \text{Error}$.

Aplicación 2: Control de Temperatura

Contexto: El horno en misdulcecitos.com debe mantener 180°C. Si una alarma suena cuando la temperatura difiere en más de 5°C, plantee la inecuación y determine qué temperaturas activan la alarma.
Solución: Diferencia: $|T - 180| > 5$.
$T - 180 > 5 \implies T > 185$.
$T - 180 < -5 \implies T < 175$. La alarma suena si baja de 175°C o sube de 185°C.

Aplicación 3: Distancia entre Móviles

Contexto: Dos vehículos están en una carretera recta. El auto A está en el km x y el camión B en el km 45. Si la distancia que los separa es exactamente 12 km, halle las posiciones posibles de A.
Solución: Distancia es $|x - 45| = 12$.
$x - 45 = 12 \implies x = 57$.
$x - 45 = -12 \implies x = 33$. El auto está en el km 33 o 57.

COMENTARIO
Siempre hay dos respuestas en distancias unidimensionales: una por delante y otra por detrás del punto de referencia.

Aplicación 4: Economía y Desviación

Contexto: El precio P de una acción oscila respecto a su promedio móvil mensual de \$120. Si la desviación absoluta media es de \$8, ¿cuáles son los límites de cotización?
Solución: La ecuación límite es $|P - 120| = 8$.
Resolviendo: $P - 120 = 8 \implies P = 128$.
$P - 120 = -8 \implies P = 112$. Límites: \$112 y \$128.

Aplicación 5: Física Cuántica (Incertidumbre)

Contexto: La posición x de una partícula respecto al origen tiene una incertidumbre. Si sabemos que $|2x - 6| < 0{,}4$ nanómetros, halle el intervalo de posición de la partícula.
Solución: $-0{,}4 < 2x - 6 < 0{,}4$. Sumamos 6: $5{,}6 < 2x < 6{,}4$. Dividimos entre 2: $2{,}8 < x < 3{,}2$. El intervalo es $\langle 2{,}8, 3{,}2 \rangle$ nm.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responde argumentando mediante propiedades, definiciones y lógica matemática.

1. ¿Por qué la ecuación $|x| = -4$ no tiene solución en el conjunto de los números reales?

2. Explique detalladamente la diferencia conceptual entre las expresiones $\sqrt{x^2}$ y $(\sqrt{x})^2$. ¿Por qué la primera es igual a $|x|$?

3. Si le informan que $|a| = |b|$, ¿se puede concluir con total seguridad que $a = b$? Explique dando contraejemplos.

4. En términos de distancia en la recta numérica, ¿qué significa geométricamente la inecuación $|x - 3| < 2$?

5. La desigualdad triangular establece que $|a+b| \leq |a| + |b|$. ¿Bajo qué condición específica se cumple que $|a + b| = |a| + |b|$?

6. ¿Es correcto afirmar que $|x - y| = |y - x|$ para todo x, y? Demuéstrelo usando las propiedades de multiplicación.

7. Analice la expresión $\frac{|x|}{x}$. ¿Qué valores puede tomar y qué gráfica generaría en el plano cartesiano para $x \neq 0$?

8. Al resolver $|2x + 1| = x - 4$, ¿por qué es indispensable imponer primero que $x - 4 \geq 0$?

9. ¿Puede el valor absoluto de una suma ser menor que la suma de sus valores absolutos? Brinde un ejemplo numérico con signos opuestos.

10. Si $|x| < a$ se traduce como $-a < x < a$ (con $a > 0$), ¿cómo se traduciría conceptualmente $|x| > a$ en términos de intervalos?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Resuelva la ecuación básica $|3x-4|=11$.

Guía de Solución Interactiva

1. Establece los dos casos por definición del valor absoluto:
Caso 1: $3x-4=$ __________ y Caso 2: $3x-4=$ __________

2. Despeja $3x$ sumando 4 en ambos lados para cada caso:
$3x=$ __________ y $3x=$ __________

3. Divide entre 3 y encuentra el conjunto solución:
CS = {__________, __________}

Problema 2. Resuelva la igualdad con dos valores absolutos: $|x+2|=|2x-5|$.

Guía de Solución Interactiva

1. Iguala los interiores directamente y con signos opuestos:
$x+2=$ __________ o $x+2=-($__________$)$

2. Resuelve la primera ecuación lineal:
__________ $=x$

3. Distribuye el signo negativo en la segunda ecuación y despeja x:
$x+2=-2x+5 \implies 3x=$ _____ $\implies x=$ _____
CS = {__________}

Problema 3. Simplifique $E=|x-6|-|x-1|$ asumiendo que $1<x<6$.

Guía de Solución Interactiva

1. Analiza el signo del interior $(x-6)$ si $x<6$:
$(x-6)$ es negativo, entonces $|x-6|=$ _______________

2. Analiza el signo del interior $(x-1)$ si $x>1$:
$(x-1)$ es positivo, entonces $|x-1|=$ _______________

3. Reemplaza en E y reduce términos semejantes:
$E=($__________$)-($__________$)=$ __________

Problemas Generales

Problema 4. Resuelva: $|5x+2| = 13$.

Problema 5. Halle la raíz de: $\frac{|x-3|}{2} = 4$.

Problema 6. Determine x en: $|4x-1| = |x+8|$.

Problema 7. Resuelva la ecuación: $|x^2 - 5x| = 6$.

Problema 8. Halle los valores que cumplen: $|3x-2| = x+4$.

Problema 9. Simplifique la expresión $M = \sqrt{x^2 - 10x + 25} + x$ para $x < 5$.

····▷ COMENTARIO

En las ecuaciones con variable fuera del valor absoluto, SIEMPRE comprueben sus respuestas finales en la ecuación original. A veces el álgebra produce resultados falsos.

Problema 10. Resuelva la inecuación básica: $|2x - 3| < 7$.

Problema 11. Determine el conjunto solución de: $|x + 5| > 2$.

Problema 12. Resuelva la ecuación con restricción: $|x^2 - 9| = 2x + 6$.

Problema 13. Calcule el producto de las soluciones de: $\big||2x| - 5\big| = 3$.

Problema 14. Simplifique $K = |x + 4| + |x - 4|$ para el intervalo $-4 < x < 4$.

Problema 15. Resuelva la ecuación fraccionaria: $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = 3$.

Problema 16. Halle los valores reales de x: $|x - 2| + |x - 5| = 3$. (Use lógica de distancias).

Problema 17. Resuelva el sistema: $|x| + y = 5$ y $x + |y| = 5$.

Problema 18. Determine el valor mínimo que puede tomar la expresión $f(x) = |x-3| + |x-7|$.

Problema 19. Resuelva para x: $x^2 - 4|x| - 12 = 0$.

Problema 20. Halle el conjunto solución: $|x-1| = 2x-5$. Verifique sus raíces.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un eje de motor debe medir 20mm de radio, con una tolerancia de 0.05mm. Modele el rango aceptable.

Guía de Solución Interactiva

1. Define la variable real x y el valor ideal:
Centro = _____, Error = _____

2. Plantea la desigualdad de tolerancia $|x - \text{Centro}| \leq \text{Error}$:
$|x - \_\_\_\_\_| \leq \_\_\_\_\_$

3. Desdobla la inecuación para hallar el rango de milímetros útiles:
$\_\_\_\_\_\_\_ \leq x \leq \_\_\_\_\_\_\_$

Problema 2. Un termostato casero fija el ambiente en 22°C. Solo enciende si la fluctuación supera los 3°C. Modele la activación.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica la temperatura base y la diferencia crítica:
Base = _____, Variación límite = _____

2. Expresa que la distancia excede el límite (usando $>$):
$|T - \_\_\_\_\_| > \_\_\_\_\_$

3. Determina los rangos térmicos donde el aparato se encenderá:
$T < \_\_\_\_\_\_\_$ o $T > \_\_\_\_\_\_\_$

Problema 3. Un satélite orbita a una altitud h. La diferencia absoluta entre su altura y 400 km es de 15 km. Halle h.

Guía de Solución Interactiva

1. Traduce "diferencia absoluta" a una ecuación matemática:
$|h - \_\_\_\_\_| = \_\_\_\_\_$

2. Separa en dos ecuaciones algebraicas simples:
$h - 400 = \_\_\_\_\_$ y $h - 400 = \_\_\_\_\_$

3. Calcula las dos altitudes orbitales posibles:
$h_1 = \_\_\_\_\_\_\_$ km, $h_2 = \_\_\_\_\_\_\_$ km

Problemas Generales

Problema 4. En el torneo de Newton College, el puntaje ideal es 100. Los estudiantes que pasaron tienen una variación exacta de 5 puntos. Halle sus puntajes.

Problema 5. El peso ideal de un costal de harina es 25 kg. Se desechan si su desviación supera los 0.8 kg. Escriba la inecuación de descarte.

Problema 6. Una bomba de agua sumergible opera en un pozo a profundidad y. Sabiendo que $|y + 30| = 12$ metros bajo tierra, determine sus posibles ubicaciones reales.

Problema 7. En clasesvirtuales.net el ancho de banda base es 50 Mbps. Si la fluctuación máxima permitida es del 10 %, modele el rango de velocidad funcional.

Problema 8. El Ph de una piscina ideal es 7.4. Si el margen de seguridad para no irritar los ojos es $|P - 7{,}4| \leq 0{,}2$, determine el rango de acidez tolerable.

Problema 9. En una ruta lineal, un tren logístico se ubica en el marcador x. Su distancia al almacén (km 120) es el doble de su distancia a la ciudad (km 30). Halle x.

Problema 10. La presión arterial sistólica normal es 120 mmHg. Si un médico define hipertensión leve cuando $|P - 120|$ está entre 10 y 19, delimite los intervalos críticos.

Problema 11. Las ganancias diarias de un local varían. El administrador reporta que $|Ganancia - 1500| = 300$. ¿Cuál es el rango de flujo de caja absoluto posible?

Problema 12. La tensión de una cuerda es T. Se sabe que $\sqrt{T^2 - 100T + 2500} = 15$. Calcule los valores admisibles de tensión física.

Problema 13. El radio de órbita de un electrón fluctúa. Si el error absoluto Δr

satisface $|3\Delta r - 0{,}06| \leq 0{,}03$ nm, encuentre el margen microscópico real.

Problema 14. En una auditoría, el saldo contable S debe cumplir que la diferencia respecto a \$50k iguale la diferencia respecto a \$40k. Halle S usando valor absoluto.

Problema 15. Una fresadora CNC corta perfiles. El ángulo de corte θ debe satisfacer $|\theta - 90°| < 0{,}5°$. Redacte el intervalo angular de aprobación.

Problema 16. Se diseña una lente donde la distancia focal f cumple $\left|\frac{10}{f-5}\right| = 2$. Determine los focos operativos logrados en el pulido.

Problema 17. Un analista de datos depura registros. Elimina los tiempos t (minutos) que verifican $|t - 45| > 2|t - 30|$. Modele el intervalo de tiempo validado asumiendo $t > 30$.

Problema 18. Un resorte se estira desde su longitud natural de 15 cm. La energía potencial obliga a que el estiramiento cumpla $|x-15| = x/4$. Halle el tamaño final.

Problema 19. Para que un motor arranque, el voltaje V debe cumplir $|V - 110| \leq 10$ y a la vez $|V - 105| \leq 10$. Halle el rango superpuesto útil.

Problema 20. La diferencia absoluta entre la edad actual de Ana y 30 es igual a la mitad de su edad dentro de 5 años. Calcule su edad exacta mediante modelado.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $x = 5, x = -7/3$
2. $x = 7, x = 1$
3. -5
4. $x = 11/5, x = -3$
5. $x = 11, x = -5$
6. $x = 3, x = -7/5$
7. $x = 6, x = -1, x = 3, x = 2$
8. $x = 3, x = -1$
9. 5
10. $\langle -2, 5 \rangle$
11. $\langle -\infty, -7 \rangle \cup \langle -3, \infty \rangle$
12. $x = 3, x = -1, x = -3$ (5 no es válida por restricción) - *Corrección: $x^2 - 2x - 15 = 0 \to x = 5, -3$. $x^2 + 2x - 3 = 0 \to x = -3, 1$. Válidas: 5, -3, 1.*
13. Producto es -64 (Raíces $\pm 4, \pm 1$)
14. 8
15. $x = 5/2, x = 1/4$
16. $[2, 5]$ (Todos los valores en el segmento)
17. $x = y$ para $x \in [0, 5]$. Ej: $x = 2{,}5, y = 2{,}5$. *Ojo: si $x, y > 0 \to x + y = 5$.*
18. Mínimo es 4
19. $x = 6, x = -6$ (La variable $|x|$ toma 6)
20. $\text{CS} = \{4\}$ ($x = 2$ es raíz extraña)

Propuestos de Aplicación

1. $[19{,}95, 20{,}05]$ mm
2. $T < 19$°C o $T > 25$°C
3. 415 km y 385 km
4. 105 y 95 puntos
5. $|P - 25| > 0{,}8$
6. A -18m y -42m de profundidad.
7. $[45, 55]$ Mbps
8. $[7{,}2, 7{,}6]$
9. $x = 60$ km o $x = 0$ km
10. $[101, 110]$ y $[130, 139]$
11. 1800 o 1200 dólares
12. $T = 65$ o $T = 35$ (Por $|T - 50| = 15$)
13. $[0{,}01, 0{,}03]$ nm
14. \$45k (Punto medio)
15. $\langle 89{,}5°, 90{,}5° \rangle$
16. $f = 10$ cm y $f = 0$ cm
17. $t < 35$ minutos (Validado)
18. 20 cm o 12 cm
19. $[100, 115]$ superpuesto con $[95, 115] \implies [100, 115]$V.
20. 11.66 años o 65 años (por $|E - 30| = \frac{E+5}{2}$)

$|x - y| \geq 0$

¡Objetivo Alcanzado!

"No hay distancias negativas cuando caminas hacia tus metas."

- Motivación Diaria

¡Felicidades por completar otro reto! Domina las herramientas matemáticas y el mundo será tu pizarra.

$|f(x)|$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com