

$$\sin \theta = \frac{O}{H}$$

PRECÁLCULO

TRIGONOMETRÍA

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

CUADERNO DE TRABAJO
SOH CAH TOA y Resolución Analítica

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Teoría: El Dominio de SOH CAH TOA

La trigonometría básica nace del triángulo rectángulo (un triángulo con un ángulo de 90°). Todo se reduce a analizar la proporción o razón geométrica que existe entre dos de sus tres lados respecto a un ángulo agudo θ .

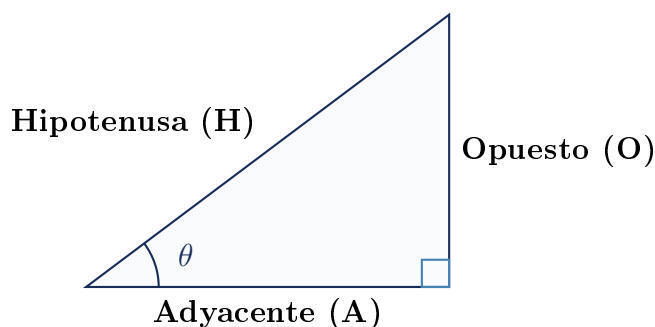
1. Anatomía del Triángulo y SOH CAH TOA

Para un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo, definimos:

- **Hipotenusa (H):** El lado más largo, siempre opuesto al ángulo de 90° .
- **Cateto Opuesto (O):** El lado que está enfrente del ángulo θ .
- **Cateto Adyacente (A):** El lado que "toca." forma el ángulo θ junto con la hipotenusa.

La mnemotecnica **SOH CAH TOA** resume las tres funciones principales:

$$\sin(\theta) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \quad \cos(\theta) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \quad \tan(\theta) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}}$$



....▷

PROFE TEO

¡Ojo a tu calculadora! Antes de resolver, verifica siempre si tu calculadora tiene una "D"(Degrees/Grados) o una R"(Radianes) en la pantalla. ¡Un error de modo arruina todo!

2. Funciones Recíprocas y el Teorema de Pitágoras

Las otras tres funciones trigonométricas se obtienen simplemente "volteando" las fracciones de SOH CAH TOA:

$$\csc(\theta) = \frac{H}{O} = \frac{1}{\sin(\theta)} \quad \sec(\theta) = \frac{H}{A} = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \cot(\theta) = \frac{A}{O} = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

Además, **nunca olvides** que los tres lados están atados por el Teorema de Pitágoras: $O^2 + A^2 = H^2$. Si conoces dos lados, ¡siempre puedes hallar el tercero!

....▷

PROFE TEO

Las funciones recíprocas no son funciones inversas. $\csc(\theta)$ significa voltear la fracción de $\sin(\theta)$. ¡No es lo mismo que $\sin^{-1}(\theta)$!

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Hallando las Seis Funciones

Enunciado: En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto a θ mide 5 y el cateto adyacente mide 12. Halle las 6 funciones trigonométricas de θ .

Solución: 1. Hallamos la hipotenusa (H) mediante Pitágoras: $H^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \implies H = 13$.

2. Aplicamos SOH CAH TOA: $\sin \theta = \frac{5}{13}$, $\cos \theta = \frac{12}{13}$, $\tan \theta = \frac{5}{12}$.

3. Volteamos para las recíprocas: $\csc \theta = \frac{13}{5}$, $\sec \theta = \frac{13}{12}$, $\cot \theta = \frac{12}{5}$.

....▷

PROFE TEO

Para despejar un ángulo, necesitas las funciones inversas en tu calculadora: \sin^{-1} , \cos^{-1} , o \tan^{-1} . Estas funciones "matan" la trigonometría normal.

Problema Resuelto 2: Despejando un Lado Oculto

Enunciado: En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 20 y el ángulo $\alpha = 35^\circ$. Halle el cateto adyacente x .

Solución: Conocemos Hipotenusa y queremos Adyacente. Usamos CAH (cos):

$$\cos(35^\circ) = \frac{x}{20}$$

Multiplicamos ambos lados por 20: $x = 20 \cdot \cos(35^\circ)$. Usando calculadora: $x \approx 20 \cdot 0,8191 \approx 16,38$. **Respuesta:** El cateto adyacente mide aproximadamente 16,38.

Problema Resuelto 3: Encontrando el Ángulo Oculto

Enunciado: Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes 7 y 10. Calcule el ángulo θ opuesto al lado que mide 7.

Solución: Conocemos Opuesto (7) y Adyacente (10). Usamos TOA (tan):

$$\tan(\theta) = \frac{7}{10} = 0,7$$

Aplicamos la tangente inversa (arco tangente) en ambos lados:

$$\theta = \tan^{-1}(0,7)$$

Con la calculadora en grados: $\theta \approx 34,99^\circ$.

Problema Resuelto 4: Uso de Identidades Recíprocas

Enunciado: Si el ángulo β es agudo y sabemos que $\sec(\beta) = \frac{17}{8}$, determine el valor exacto de $\sin(\beta)$.

Solución: 1. Si $\sec(\beta) = \frac{H}{A} = \frac{17}{8}$, sabemos que Hipotenusa = 17 y Adyacente = 8. 2. Usamos Pitágoras para hallar el Opuesto (O): $O^2 + 8^2 = 17^2 \implies O^2 + 64 = 289 \implies O^2 = 225 \implies O = 15$. 3. Calculamos el seno usando SOH: $\sin(\beta) = \frac{O}{H} = \frac{15}{17}$.

Problema Resuelto 5: Triángulos Compartidos (Avanzado)

Enunciado: Dos triángulos rectángulos comparten el mismo cateto opuesto de longitud h . Si sus ángulos de elevación son 30° y 60° y la distancia total en el suelo es 40, halle h .

Solución: Sea x la base del primer triángulo y $(40 - x)$ la base del segundo.
 $\tan(60^\circ) = \frac{h}{x} \implies h = x\sqrt{3} \implies x = \frac{h}{\sqrt{3}}$. $\tan(30^\circ) = \frac{h}{40-x} \implies h = (40 - x)\frac{\sqrt{3}}{3}$. Reemplazando x : $h = \left(40 - \frac{h}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}$. Despejando: $3h = 40\sqrt{3} - h \implies 4h = 40\sqrt{3} \implies h = 10\sqrt{3}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Altura Estructural

Contexto: Un topógrafo ubicado a cincuenta metros horizontales de un rascacielos corporativo levanta su teodolito apuntando al techo. El instrumento reporta un ángulo de elevación de cuarenta y dos grados. Determine analíticamente la altura total vertical de este edificio ignorando la estatura del operario.

Solución: Queremos Opuesto (h), tenemos Adyacente (50). Usamos Tangente (TOA). $\tan(42^\circ) = \frac{h}{50}$. $h = 50 \cdot \tan(42^\circ) \approx 50(0,9004) \approx 45,02$. **Respuesta:** El edificio mide 45,02 metros.

Aplicación 2: Longitud de Cable

Contexto: Para asegurar una torre de telecomunicaciones contra vientos huracanados, se ancla un cable tensor desde el pináculo hasta el suelo. El cable forma un ángulo sesenta grados apoyándose firmemente en tierra. Sabiendo que la antena posee treinta metros altitudinales, calcule los metros diagonales acerados requeridos.

Solución: Tenemos Opuesto (30), queremos Hipotenusa (c). Usamos Seno (SOH). $\sin(60^\circ) = \frac{30}{c} \implies c = \frac{30}{\sin(60^\circ)}$. $c = \frac{30}{\sqrt{3}/2} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} \approx 34,64$.

Respuesta: Se requieren 34,64 metros de cable.

Aplicación 3: Escala Perimetral

Contexto: Durante reparaciones residenciales, una escalera de aluminio rígida de siete metros longitudinales reposa oblicuamente contra una fachada perimetral. La base inferior asienta distanciada dos metros exactamente del muro. Determine trigonométricamente el ángulo agudo generado entre esta herramienta y el piso empedrado nivelado.

Solución: Tenemos Adyacente (2), conocemos Hipotenusa (7). Usamos Coseno (CAH). $\cos(\theta) = \frac{2}{7}$. Aplicamos función inversa: $\theta = \cos^{-1}(2/7)$. $\theta \approx \cos^{-1}(0,2857) \approx 73,40^\circ$. **Respuesta:** El ángulo formado es $73,40^\circ$.

Aplicación 4: Inmersión Marina

Contexto: Un submarino nuclear rompe la superficie oceánica iniciando inmersión táctica con ángulo depresivo constante de quince grados. Moviéndose propulsado ochocientos metros diagonales rectilíneos mar adentro, descubra la profundidad abismal exacta lograda respecto al nivel cero del oleaje agitado superficial.

Solución: Tenemos Hipotenusa (800), buscamos Opuesto (profundidad p). SOH. $\sin(15^\circ) = \frac{p}{800}$. $p = 800 \cdot \sin(15^\circ) \approx 800(0,2588) \approx 207,05$. **Respuesta:** Descendió a 207,05 metros.

....▷

PROFE TEO

¡Depresión y Elevación son gemelos! Por alternos internos, el ángulo de depresión mirando hacia abajo es EXACTAMENTE IGUAL al ángulo de elevación de alguien que te mirase desde abajo.

Aplicación 5: Doble Observación (Avanzado)

Contexto: Dos campistas separados ochenta metros linealmente miran maravillosamente un globo aerostático volando rectamente entre ambos. El primero reporta cuarenta y cinco grados elevativos; el segundo evalúa treinta grados inclinados respectivamente. Establezca la altitud cenital precisa presenciada por el navío aerostático colgante.

Solución: Altura h . Base 1 = x , Base 2 = $80 - x$. 1) $\tan(45^\circ) = h/x \implies 1 = h/x \implies x = h$. 2) $\tan(30^\circ) = h/(80 - x) \implies \sqrt{3}/3 = h/(80 - h)$. $80\sqrt{3} - h\sqrt{3} = 3h \implies 80\sqrt{3} = h(3 + \sqrt{3})$. $h = \frac{80\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \approx 29,28$. **Respuesta:** La altitud es $\approx 29,28$ metros.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Argumente algebraicamente por qué el valor de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ en un triángulo rectángulo jamás podrá ser mayor a 1 o menor a -1 .
2. A diferencia del seno y coseno, justifique geoméricamente por qué la función $\tan(\theta)$ puede tomar cualquier valor numérico, desde fracciones minúsculas hasta miles.
3. Analice la relación entre ángulos complementarios: si $\alpha + \beta = 90^\circ$, demuestre que el cateto opuesto a α es exactamente el adyacente a β , y por tanto, $\sin(\alpha) = \cos(\beta)$.
4. ¿Por qué intentar calcular $\tan(90^\circ)$ arroja un .Error de Dominio. en cualquier calculadora moderna? Piense en la anatomía del triángulo al cerrarse.
5. Expresé verbalmente por qué el Teorema de Pitágoras ($O^2 + A^2 = H^2$) puede ser reescrito directamente como la Identidad Trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.
6. Si en un triángulo rectángulo los dos catetos miden exactamente lo mismo, deduzca mentalmente (sin tablas) cuánto deben medir los dos ángulos agudos internos.
7. Si un compañero afirma que $\csc(\theta) = \sin^{-1}(\theta)$, explique el gravísimo error algebraico confundiendo una razón invertida con una función inversa.
8. ¿Por qué en problemas de "Ángulo de Depresión.este se mide tomando como referencia una línea horizontal imaginaria en el aire, y no la línea vertical hacia abajo?
9. Dado que la hipotenusa es el lado más largo, compruebe que $\sec(\theta)$ siempre será una cantidad mayor o igual a la unidad (1).
10. Si solo conoce la medida de la hipotenusa pero ningún ángulo agudo, ¿por qué es matemáticamente imposible resolver los catetos del triángulo rectángulo?



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

- $H = 10 \rightarrow 3/5$.
- $\sin(\alpha) = 0,5 \rightarrow 30^\circ$.
- $O = 1, A = 1 \implies H = \sqrt{2} \implies 1$.
- Opuesto = 12 $\implies \tan = 12/5$.
- $\csc = 5/3, \cos = 4/5 \implies 4/3$.
- $x = 15 \cos(40^\circ) \approx 11,49$.
- $H = 18/\sin(60^\circ) \approx 20,78$.
- $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = 30^\circ$.
- $(1/2)(1/2) + 1 = 5/4 = 1,25$.
- $A = (25 \sin 20)(25 \cos 20) \approx 201,2$.
- $1 + \cot(\theta) = 1 + 4 = 5$.
- $H = 5x \implies 5x = 20 \implies x = 4$.
- Demostración: $P = H + H \sin \alpha + H \cos \alpha$.
- 45° .
- $(\sqrt{2})(\sqrt{2}) - 1 = 2 - 1 = 1$.
- $\sin(A) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $2 \times (10/\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14,14$.
- $\cos(\theta) = 1/2 \implies \theta = 60^\circ$.
- $(2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$.
- $h = 4 \sin(30) \cos(30) = 4(1/2)(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}$.

Propuestos de Aplicación

- $12 \sin(15^\circ) \approx 3,11$ m.
- $50/\tan(20^\circ) \approx 137,37$ m.
- $\sin^{-1}(60/100) \approx 36,87^\circ$.
- $25 \cos(35^\circ) \approx 20,48$ m.
- $14/\cos(30^\circ) \approx 16,17$ m.
- $20 \sin(55^\circ) \approx 16,38$ m.
- $\sin^{-1}(200/800) \approx 14,48^\circ$.
- $10/\cos(70^\circ) \approx 29,24$ m.
- $100 \tan(10^\circ) \approx 17,63$ m.
- Ang piso $82^\circ \implies 6/\cos(82^\circ) \approx 43,1$ m.
- $3 \sin(20^\circ) \approx 1,03$ m.
- $50/\sin(12^\circ) \approx 240,49$ m.
- $2/\sin(38^\circ) \approx 3,25$ m.
- $5/\tan(65^\circ) \approx 2,33$ m.
- $2 \sin(14^\circ) \approx 0,48$ m.
- $5/\cos(22^\circ) \approx 5,39$ m (539 cm).
- $3000 \cos(70^\circ) \approx 1026,06$ m.
- $6/\sin(35^\circ) \approx 10,46$ m.
- $40 \tan(24^\circ) \approx 17,81$ m.
- $9 \tan(60^\circ) \approx 15,59$ m.

$\tan \theta$

¡Nivel Desbloqueado!

'La vida, al igual que los triángulos rectángulos, no se mide solo por la altura del obstáculo que enfrentas, sino por el ángulo con el que decides mirarlo. Cambia tu perspectiva y siempre hallarás una solución.'

- El Arte del Cateto

¡Formidable esfuerzo! Ahora posees las herramientas analíticas para triangular y resolver cualquier distancia inaccesible del mundo físico.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

CSC