PRECÁLCULO

TRANSFORMACIONES RÍGIDAS

CUADERNO DE TRABAJO

Desplazamientos verticales y horizontales

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Movimientos Rígidos

Una **transformación rígida** altera la posición de una gráfica en el plano cartesiano sin cambiar su tamaño ni su forma básica. Imagina que la gráfica es un alambre rígido: solo puedes deslizarlo hacia arriba, abajo, izquierda o derecha.

PROFE TEO

¡Atención aquí! Los cambios .ªfuera"de la función afectan a y (vertical) y son intuitivos. Los cambios .ªdentro"de la función afectan a x (horizontal) y operan al revés de lo que dicta tu lógica.

1. Desplazamientos Verticales (Fuera de la función)

Sea $c > 0$ un número real constante. Si sumamos o restamos c a toda la función $f(x)$, la gráfica se mueve a lo largo del eje Y.

- $\boldsymbol{y = f(x) + c}$: Desplaza la gráfica de $f(x)$ hacia **arriba** en c unidades.
- $\boldsymbol{y = f(x) - c}$: Desplaza la gráfica de $f(x)$ hacia **abajo** en c unidades.

El dominio no se altera, pero el rango cambia sumando o restando c.

2. Desplazamientos Horizontales (Dentro de la función)

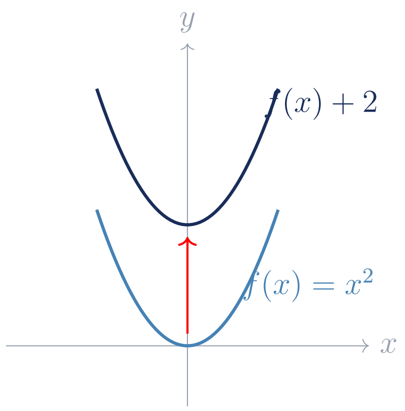
Sea $c > 0$. Si sumamos o restamos c directamente a la variable x **antes** de aplicar la función, la gráfica se mueve en el eje X.

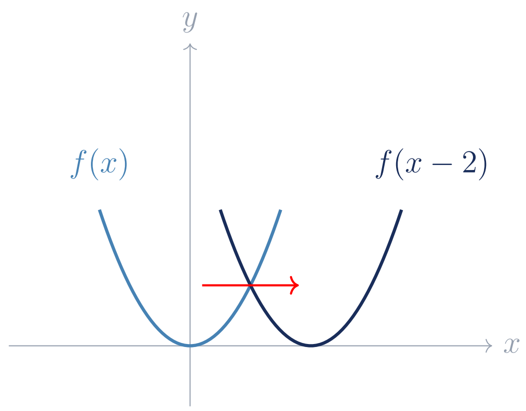
- $\boldsymbol{y = f(x - c)}$: Desplaza la gráfica hacia la **derecha** en c unidades.
- $\boldsymbol{y = f(x + c)}$: Desplaza la gráfica hacia la **izquierda** en c unidades.

El rango no se altera, pero el dominio cambia sumando o restando c.

PROFE TEO

¿Por qué $x - c$ mueve a la derecha? Porque para que el interior vuelva a ser cero, ahora necesitas que x valga $+c$. La gráfica debe "viajar"hacia los positivos para compensar.





Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Movimiento Combinado Básico

Enunciado: Describa las transformaciones aplicadas a $f(x) = |x|$ para obtener $g(x) = |x - 4| + 3$.
Solución: 1) El término $(x - 4)$ indica un desplazamiento **horizontal**. Al ser negativo, se mueve 4 unidades a la **derecha**.
2) El término $+3$ fuera del valor absoluto indica un desplazamiento **vertical**. Se mueve 3 unidades hacia **arriba**.
El vértice pasa de $(0, 0)$ a $(4, 3)$.

Problema Resuelto 2: Ajuste de Dominio

Enunciado: Si el dominio de $f(x)$ es $[-2, 5]$, ¿cuál es el dominio de $h(x) = f(x + 3) - 1$?
Solución: El 1"solo afecta al rango. El cambio de dominio depende de $x + 3$.
La transformación $x + 3$ mueve la gráfica 3 unidades a la **izquierda**.
Restamos 3 a los extremos originales: $[-2 - 3, 5 - 3]$.
Nuevo dominio: $[-5, 2]$.

PROFE TEO
Si tienes dudas con el dominio tras un cambio horizontal $f(x + c)$, simplemente plantea la inecuación: $\text{Dom}_{min} \leq x + c \leq \text{Dom}_{max}$ y despeja x.

Problema Resuelto 3: Reescribir la Función

Enunciado: Escriba la ecuación de la gráfica $y = \sqrt{x}$ después de ser desplazada 5 unidades a la izquierda y 2 hacia abajo.
Solución: Izquierda 5 unidades significa reemplazar x por $(x + 5)$.
Abajo 2 unidades significa restar 2 a toda la función.
Ecuación final: $y = \sqrt{x + 5} - 2$.

Problema Resuelto 4: Identificar la Función Base

Enunciado: Dada $g(x) = (x - 7)^3 + 1$, identifique la función madre y sus transformaciones.
Solución: La estructura principal es algo elevado al cubo, por lo que la función madre es $f(x) = x^3$.
Transformaciones: Reemplazar x por $x - 7$ mueve la cúbica 7 unidades a la derecha. Sumar 1 la mueve 1 unidad hacia arriba.

Problema Resuelto 5: Función Racional Desplazada

Enunciado: Determine las ecuaciones de las asíntotas de $f(x) = \frac{1}{x+2} - 4$.
Solución: La función base $y = 1/x$ tiene asíntotas en $x = 0$ e $y = 0$.
La transformación $x+2$ mueve la gráfica 2 unidades a la izquierda. La asíntota vertical se mueve a $\boldsymbol{x = -2}$.
La transformación -4 mueve la gráfica 4 unidades abajo. La asíntota horizontal se mueve a $\boldsymbol{y = -4}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Altitud de Drones

Contexto: La ruta de un dron está modelada por $A(t) = t^2$. Si el operador retrasa el inicio 3 segundos y eleva la altura base en 10 metros, exprese el nuevo modelo.
Solución: Retraso temporal mueve la gráfica a la derecha: $(t-3)$.
Mayor altura base la sube: $+10$.
Respuesta: El nuevo modelo es $A_{nueva}(t) = (t-3)^2 + 10$.

Aplicación 2: Calibración Óptica

Contexto: Un láser traza la curva $L(x) = \sqrt{x}$. Por desajuste, la lente focal se movió 2 mm a la izquierda. Escriba la ecuación de corrección de calibración requerida.
Solución: La curva actual está desplazada a la izquierda, por tanto, se comporta como $\sqrt{x+2}$.
Para corregirla a su posición original, debemos forzarla a la derecha.
Respuesta: El ajuste del láser debe programarse como $\sqrt{x-2}$.

Aplicación 3: Punto de Equilibrio

Contexto: El margen operativo obedece a $M(q) = |q - 100|$. El gerente de planta logra reducir los costos fijos, aumentando el margen en 500 unidades. Plantee la función final.
Solución: El aumento de margen de manera general impacta externamente la función.
Esto equivale a un desplazamiento vertical ascendente.
Respuesta: La ecuación final es $M_{final}(q) = |q - 100| + 500$.

Aplicación 4: Sumergible Autónomo

Contexto: La inmersión sigue una matriz $P(h) = h^3$. Una corriente arrastra el vehículo 4 millas al oeste (izquierda) de su objetivo original. Determine la ecuación de inmersión geolocalizada.
Solución: El arrastre al oeste representa un desplazamiento en el eje horizontal negativo.
Para mover una gráfica a la izquierda 4 unidades, sumamos internamente.
Respuesta: La inmersión se calcula con $P_{nueva}(h) = (h+4)^3$.

PROFE TEO
Las transformaciones de tiempo siempre son horizontales. Retrasarün evento es moverlo hacia los tiempos positivos (derecha, $t-c$). .^{A}delantarlo.^{es} moverlo hacia la izquierda $(t+c)$.

Aplicación 5: Sensor Térmico

Contexto: Un termostato lee temperaturas según $T(s) = \frac{100}{s}$. Al recalibrar, la lectura se estabiliza disminuyendo 5 grados uniformemente a lo largo de todo el espectro medido. Especifique el modelo.
Solución: Una disminución uniforme de la lectura térmica general representa una caída de la curva en el eje vertical.
Restamos la constante fuera de la función.
Respuesta: El modelo corregido es $T_r(s) = \frac{100}{s} - 5$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos analíticos o visuales.

1. Explique lógicamente por qué restar un número dentro del argumento de la función (ej. $x-5$) hace que la gráfica se mueva en la dirección positiva y no en la negativa.

2. Si aplicamos un desplazamiento vertical y uno horizontal a una función, ¿importa el orden en que los apliquemos geométricamente? Justifique.

3. Dado $f(x)=x^2$, la transformación $f(x+2)$ mueve la gráfica a la izquierda. ¿Qué otra transformación algebraica no rígida podría generar exactamente la misma gráfica visual?

4. Un compañero afirma que $g(x)=(x-3)^2$ y $h(x)=x^2-3$ tienen el mismo rango. Argumente por qué esta afirmación es falsa.

5. Analice la función constante $f(x)=8$. ¿Qué efecto visible tiene un desplazamiento horizontal $f(x-4)$ sobre su gráfica?

6. ¿Por qué la asíntota vertical de la función recíproca $y=1/x$ se ve afectada por $f(x-c)$ pero ignora por completo a $f(x)+c$?

7. Si el vértice de $y=|x|$ está en $(0,0)$, ¿cuáles serán las nuevas coordenadas del vértice si aplicamos simultáneamente $y=|x+a|-b$, asumiendo $a,b>0$?

8. En un modelo de población $P(t)$, explique la diferencia conceptual práctica entre calcular $P(t)-100$ y calcular $P(t-100)$.

9. Si desplazamos la función impar $f(x)=x^3$ dos unidades hacia la derecha, ¿la nueva función sigue siendo impar? Geométricamente, ¿por qué se rompe la paridad?

10. Demuestre que si desplazamos una línea recta $y=mx$ de forma horizontal, el resultado puede expresarse siempre como un desplazamiento puramente vertical.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Exprese la función base $f(x) = x^2$ desplazada 5 unidades hacia abajo.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica el tipo de movimiento: Hacia abajo es un desplazamiento ______.
2. Esto significa que debemos operar ______ (fuera/dentro) de la función.
3. Escribimos la ecuación restando la constante: $y = \_\_\_ - \_\_\_$.

Problema 2. Escriba la ecuación para $g(x) = |x|$ movida 4 unidades a la izquierda.

Guía de Solución Interactiva

1. Hacia la izquierda es un movimiento ______ y afecta a x.
2. Para mover a la izquierda, operamos con signo ______ (positivo/negativo).
3. Sustituimos x por $(x\_\_\_4)$ en la función madre: $y = |\_\_\_|$.

Problema 3. Transforme $h(x) = \sqrt{x}$ al moverla 2 unidades a la derecha y 3 hacia arriba.

PROFE TEO

Siempre visualiza el vértice. Para la parábola o valor absoluto, el vértice de $y = f(x-h)+k$ siempre aterriza en (h, k).

Guía de Solución Interactiva

1. Movimiento a la derecha 2 unidades cambia x por ______.
2. Movimiento hacia arriba 3 unidades suma ___ fuera de la raíz.
3. Ecuación combinada final: $y = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} + \_\_\_$.

Problemas Generales

Problema 4. Dada $f(x) = x^3$, escriba la función desplazada 6 unidades arriba.

Problema 5. Describa el movimiento de la gráfica $y = |x - 8|$.

Problema 6. Transforme $f(x) = \frac{1}{x}$ moviéndola 7 unidades a la izquierda.

Problema 7. Halle las coordenadas del vértice de $y = (x + 3)^2 - 5$.

Problema 8. Escriba la función si $y = \sqrt{x}$ se desplaza 1 derecha y 4 abajo.

Problema 9. Indique la asíntota vertical de la función $g(x) = \frac{1}{x-9} + 2$.

Problema 10. Si $\mathrm{Dom}(f) = [-4, 6]$, determine el dominio de $y = f(x - 5)$.

Problema 11. Si $\mathrm{Ran}(g) = [0, \infty)$, determine el rango de $y = g(x + 2) - 8$.

Problema 12. Determine la ecuación resultante si $y = x^2 - 1$ se mueve 3 a la derecha.

Problema 13. Simplifique algebraicamente el desplazamiento de $f(x) = 2x + 1$ hacia abajo en 4 unidades.

Problema 14. Halle los interceptos con los ejes de $y = |x - 2| - 2$.

Problema 15. Traslade $y = \frac{1}{x}$ de modo que sus asíntotas sean $x = 4$ e $y = -1$.

Problema 16. Deduzca la función cuadrática cuyo vértice está en $(-6, 7)$.

Problema 17. Si $h(x) = \sqrt{x+4} - 3$, ¿qué transformaciones la regresan al origen $y = \sqrt{x}$?

Problema 18. Encuentre el dominio y rango de $f(x) = |x - 10| + 12$.

Problema 19. La gráfica de $y = x^3$ se mueve para cruzar el origen en $(0, 8)$. Dé su ecuación.

Problema 20. Traslade la circunferencia implicita $x^2 + y^2 = 9$ tres unidades a la izquierda.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Una antena parabólica perfila $y = x^2$. El ingeniero desplaza el plato 4 cm hacia la derecha para evadir un obstáculo estructural. Formule la nueva ecuación.

Guía de Solución Interactiva

1. Movimiento de 4 cm a la derecha impacta el eje __________. 2. La variable x se sustituye por __________. 3. La función de la nueva antena es $y =$ __________.

Problema 2. Un termostato modula calor con $T(t) = \sqrt{t}$. Para ahorrar energía, se programa encender la máquina 5 horas después del ciclo normal. Ajuste la función.

Guía de Solución Interactiva

1. Retrasar tiempo implica un movimiento hacia tiempos mayores (eje _____). 2. Sustituimos t por el binomio temporal __________. 3. La curva reprogramada es $T_{nueva}(t) =$ __________.

Problema 3. La densidad de un cultivo decrece como $D(x) = \frac{100}{x}$. Se añade un nutriente que eleva la línea base poblacional en 20 bacterias uniformemente. Determine la ecuación.

Guía de Solución Interactiva

1. Aumentar la línea base afecta la densidad total de manera __________. 2. Esto representa sumar 20 __________ (dentro/fuera) de la función. 3. El modelo de cultivo es $D(x) =$ __________ $+ 20$.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. En botánica, el crecimiento de tallos se modela con $C(d) = d^3$. Un fertilizante acelera el proceso visualizando resultados 2 días antes de lo esperado. Exprese la función.

Problema 5. Un brazo robótico describe un arco $y = -x^2$. Por recalibración, el pivote principal se eleva 15 milímetros exactos. Determine la trayectoria ajustada de la garra.

Problema 6. La reverberación acústica decae como $R(t) = \frac{5}{t}$. Se instala un panel fonoabsorbente que reduce el eco base en 2 decibeles globales. Plantee el cálculo.

Problema 7. El desgaste en un engranaje sigue $E(h) = \sqrt{h}$. Una aleación premium permite que el desgaste comience a registrarse 100 horas más tarde de lo habitual. Exprese la regla.

Problema 8. La tensión magnética de un riel es $V(x) = |x|$. Un imán defectuoso desplaza el punto neutro de tensión 8 metros hacia el oeste magnético. Halle la curva de voltaje.

Problema 9. En astrofísica, el brillo de una supernova oscila por $B(t) = t^4$. Una distorsión gravitacional pospuso el destello en 12 años cósmicos. Formule la curva observada.

Problema 10. Un simulador de vuelo marca altitud cero en la función $y = \frac{1}{x^2}$. Se añade una cota de seguridad de 500 pies de piso virtual. Modele la cota.

Problema 11. La deflexión de una columna vertebral es $D(v) = v^2$. Un corset ortopédico corrige la postura forzando el eje central 3 grados hacia la izquierda. Deduzca el perfil.

Problema 12. La propagación de un hongo micelio sigue $A(x) = \sqrt[3]{x}$. El experimento se traslada a una placa de Petri ubicada a -5 coordenadas en X y -2 en Y. Establezca el radio.

Problema 13. La bolsa de valores modela dividendos con $y = |x-5|$. Un rescate económico inyecta capital, subiendo toda la curva financiera 10 mil dólares directos. Calcule la gráfica.

Problema 14. Un emisor de microondas direccional tiene intensidad $I(\theta) = \theta^2$. Para esquivar un satélite, el haz se rotó 15 grados a la derecha. Escriba la intensidad angular final.

Problema 15. El decaimiento de una vacuna en sangre es $C(h) = \frac{10}{h}$. Se descubre que el hígado metaboliza la dosis reteniendo una traza constante residual de 0,5 mg. Incorpore la constante.

Problema 16. Una excavadora genera un perfil en el suelo $y = x^4$. El operador excava 6 metros a la izquierda del punto planeado y profundiza 3 metros extras. Detalle el corte.

Problema 17. Un oscilador mecánico amortigua vibraciones con curva base parabólica. El equipo es reensamblado en un soporte cuyas coordenadas están desfasadas $(+7, -9)$ milímetros. Halle la función.

Problema 18. La conductividad de un semiconductor es $S(t) = \sqrt{t}$. Al sumergirse en nitrógeno, el punto cero conductivo se atrae 14 milisegundos más pronto de lo natural. Modele el evento.

Problema 19. La presión en calderas se tasa con $y = \frac{1}{x^2}$. Una fuga constante resta 1,5 atmósferas continuas al sistema sin importar el flujo interno de gas. Exprese la falla.

Problema 20. El lente principal de un microscopio electrónico tiene forma cóncava cúbica. Al girar el tambor de aumento, el foco desciende verticalmente 8 micras. Genere la óptica.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $y = x^2 - 5$
2. $y = |x + 4|$
3. $y = \sqrt{x - 2} + 3$
4. $y = x^3 + 6$
5. Desplazamiento 8 a la derecha.
6. $y = \frac{1}{x+7}$
7. $(-3, -5)$
8. $y = \sqrt{x - 1} - 4$
9. $x = 9$
10. $[1, 11]$
11. $[-8, \infty)$
12. $y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$
13. $y = 2x - 3$
14. Eje Y: $(0, 0)$. Eje X: $(0, 0)$ y $(4, 0)$.
15. $y = \frac{1}{x-4} - 1$
16. $y = (x + 6)^2 + 7$
17. Derecha 4, Arriba 3 $(x - 4, +3)$.
18. Dom: $\mathbb{R}$, Ran: $[12, \infty)$.
19. $y = x^3 + 8$ o $y = (x + 2)^3$.
20. $(x + 3)^2 + y^2 = 9$

Propuestos de Aplicación

1. $y = (x - 4)^2$
2. $T_{nueva}(t) = \sqrt{t - 5}$
3. $D(x) = \frac{100}{x} + 20$
4. $C(d) = (d + 2)^3$
5. $y = -x^2 + 15$
6. $R(t) = \frac{5}{t} - 2$
7. $E(h) = \sqrt{h - 100}$
8. $V(x) = |x + 8|$
9. $B(t) = (t - 12)^4$
10. $y = \frac{1}{x^2} + 500$
11. $D(v) = (v + 3)^2$
12. $A(x) = \sqrt[3]{x + 5} - 2$
13. $y = |x - 5| + 10$
14. $I(\theta) = (\theta - 15)^2$
15. $C(h) = \frac{10}{h} + 0{,}5$
16. $y = (x + 6)^4 - 3$
17. $y = (x - 7)^2 - 9$
18. $S(t) = \sqrt{t + 14}$
19. $y = \frac{1}{x^2} - 1{,}5$
20. $y = x^3 - 8$

Movimiento

¡Llegaste al Final!

'Un genio no dibuja la misma gráfica mil veces; simplemente aprende a deslizarla por el espacio de la geometría infinita.'

- La dinámica del álgebra

¡Felicidades! Has dominado las leyes del movimiento matemático rígido. Ninguna gráfica volverá a estar oculta para tu vista analítica.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com