$y = c \cdot f(x)$

$(c \cdot x)$

PRECÁLCULO

TRANSFORMACIONES NO RÍGIDAS

CUADERNO DE TRABAJO

Estiramientos, compresiones y reflexiones

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Alterando la Forma Original

A diferencia de los desplazamientos que solo mueven la gráfica, las **transformaciones no rígidas** deforman la curva original. La estiran, la aplastan o la voltean como un espejo.

PROFE TEO
Un factor mayor a 1 afuera estira la función hacia arriba. ¡Pero un factor mayor a 1 adentro la aplasta hacia el centro! La x siempre es rebelde y hace lo contrario a tu intuición.

1. Estiramientos y Compresiones Verticales (Afectan a y)

Multiplicar toda la función por una constante positiva a. Sea $y = af(x)$:

- Si $\boldsymbol{a > 1}$: La gráfica se **estira verticalmente**. Sus alturas se multiplican por a.
- Si $\boldsymbol{0 < a < 1}$: La gráfica se **comprime verticalmente**. Se hace más çhata".

2. Estiramientos y Compresiones Horizontales (Afectan a x)

Multiplicar la variable x por una constante positiva b. Sea $y = f(bx)$:

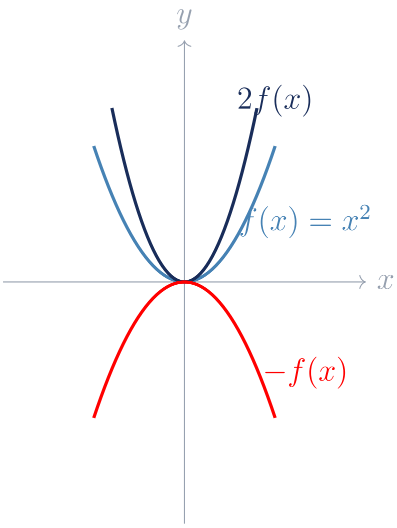
- Si $\boldsymbol{b > 1}$: La gráfica se **comprime horizontalmente** por un factor de $1/b$.
- Si $\boldsymbol{0 < b < 1}$: La gráfica se **estira horizontalmente** por un factor de $1/b$.

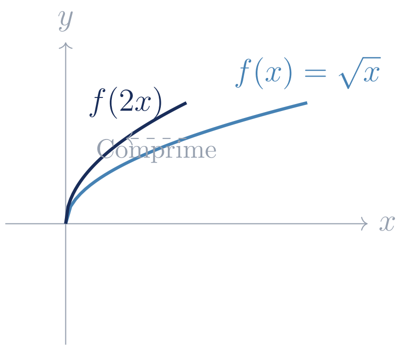
PROFE TEO
Reflexionar no cambia la forma, solo la orientación. Un signo negativo actúa como un espejo. Afuera espeja sobre X, adentro espeja sobre Y.

3. Reflexiones (El efecto espejo)

Introducir un signo negativo altera la orientación de la curva.

- $\boldsymbol{y = -f(x)}$: Reflexión respecto al **eje X**. Lo que estaba arriba va abajo.
- $\boldsymbol{y = f(-x)}$: Reflexión respecto al **eje Y**. Lo que estaba a la derecha va a la izquierda.





Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Combinar Múltiplos y Signos

Enunciado: Escriba la ecuación de $f(x) = x^2$ tras ser estirada verticalmente por un factor de 3 y reflejada sobre el eje X.
Solución: 1) Estiramiento vertical por 3 implica multiplicar afuera: $3x^2$.
2) Reflexión sobre el eje X implica un signo negativo afuera: $-(3x^2)$.
Ecuación: $y = -3x^2$.

Problema Resuelto 2: Reflexión y Dominio

Enunciado: Halle el dominio de la función $h(x) = \sqrt{-x}$.
Solución: La función base $y = \sqrt{x}$ tiene dominio $[0, \infty)$.
El signo negativo **adentro** refleja la gráfica sobre el eje Y.
Analíticamente: El radicando debe ser no negativo $\implies -x \geq 0 \implies x \leq 0$.
Dominio: $(-\infty, 0]$.

Problema Resuelto 3: Mapeo de Puntos

Enunciado: Si el punto $(4, 6)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$, ¿qué punto corresponderá en la gráfica de $g(x) = \frac{1}{2}f(2x)$?
Solución: La transformación $2x$ divide las coordenadas x entre 2: $4/2 = 2$.
La transformación $1/2$ multiplica las coordenadas y por $1/2$: $6 \cdot (1/2) = 3$.
Nuevo punto: $(2, 3)$.

PROFE TEO

Para encontrar un punto transformado (x, y) en la curva $y = af(bx)$: el nuevo punto será $(x/b, a \cdot y)$. ¡Divide la coordenada X, multiplica la coordenada Y!

Problema Resuelto 4: Compresión Horizontal Trigonométrica

Enunciado: Analice el efecto del factor 3 en la función $y = \sin(3x)$.
Solución: El factor 3 está multiplicando a la x (adentro). Como $3 > 1$, representa una **compresión horizontal** por un factor de $1/3$.
Esto significa que la onda del seno completa su ciclo tres veces más rápido. El nuevo período se reduce de 2π a $\frac{2\pi}{3}$.

Problema Resuelto 5: Reflexión Total del Valor Absoluto

Enunciado: Grafique e identifique el rango de $y = -|x|$.
Solución: La función madre es la "V"del valor absoluto, $y = |x|$, con rango $[0, \infty)$.
El signo negativo está fuera, lo que genera una **reflexión en el eje X**. La "V"se voltea y apunta hacia abajo como una montaña.
Rango: $(-\infty, 0]$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Acústica y Volumen

Contexto: Una onda sonora pura se modela con la función $y = \sin(t)$. Si un técnico de audio amplifica la señal para triplicar su volumen máximo, exprese la ecuación sonora ajustada.
Solución: Aumentar el volumen (amplitud) significa estirar la onda verticalmente por un factor de 3. Esto se logra multiplicando la función externa por 3.
Respuesta: $y = 3\sin(t)$.

Aplicación 2: Ingeniería Estructural

Contexto: La deflexión de una viga estándar de acero bajo carga es $D(x)$. Al emplear una aleación de titanio más rígida, la curvatura transversal se reduce exactamente a la mitad. Escriba el perfil.
Solución: Reducir la flexión vertical a la mitad implica una compresión vertical, multiplicando por el factor 0.5 o 1/2 en el exterior de la función.
Respuesta: El nuevo perfil es $y = 0{,}5D(x)$.

Aplicación 3: Óptica de Lentes

Contexto: El contorno de una lente de aumento sigue la curva general $C(x)$. Para fabricar una variante ultra-delgada, el diseño se comprime horizontalmente a un tercio de su anchura. Determine el ajuste.
Solución: Comprimir horizontalmente a $1/3$ exige multiplicar la variable interna por el inverso del factor deseado (es decir, por 3).
Respuesta: La curvatura de la lente será $y = C(3x)$.

Aplicación 4: Meteorología Frontal

Contexto: La temperatura diurna de un valle sube según $T(h)$. Un frente polar extremo ingresa invirtiendo la tendencia térmica diurna por completo respecto al promedio cero. Exprese la fórmula de choque.
Solución: Invertir totalmente la tendencia respecto a un eje base (promedio cero) requiere una reflexión sobre el eje horizontal. Multiplicamos por -1 fuera de la función.
Respuesta: El frente genera $y = -T(h)$.

PROFE TEO
A diferencia de los desplazamientos, las reflexiones pueden darle un giro de 180 grados al significado del modelo. Un crecimiento poblacional reflejado en X se vuelve una caída demográfica inmediata.

Aplicación 5: Ciclos Económicos

Contexto: La deuda corporativa oscila siguiendo el ciclo histórico $d(t)$. Un rescate bancario retrasa la cadencia operativa, duplicando el tiempo necesario para completar cada ciclo. Formule la economía actual.
Solución: Si el ciclo toma el doble de tiempo en ocurrir, la gráfica se estira horizontalmente por un factor de 2. Esto equivale a multiplicar t por $1/2$.
Respuesta: La curva es $y = d(t/2)$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos analíticos o visuales.

1. Si la función $y = f(x)$ representa el dibujo de una letra "p", ¿cómo se vería exactamente la letra al graficar $y = f(-x)$?
2. Explique lógicamente por qué multiplicar la variable por $b = 2$ comprime la gráfica horizontalmente en lugar de estirarla. Use puntos concretos.
3. Dado que $y = |x|$ es simétrica respecto al eje Y, ¿qué efecto visual tendrá graficar la transformación $y = |-x|$? Argumente.
4. Si el intercepto con el eje Y de una función es $(0, 5)$, determine cuál será el nuevo intercepto tras aplicar $y = 3f(x)$.
5. Utilizando el mismo escenario anterior, ¿cuál será el intercepto en el eje Y si la transformación aplicada es $y = f(3x)$? Justifique el porqué de la diferencia.
6. Una función cuadrática general $y = ax^2$ abre hacia arriba o hacia abajo. Conecte este hecho con las reflexiones de la función madre $f(x) = x^2$.
7. Si el dominio original de $f(x)$ es $[4, 10]$, ¿cuál será el dominio tras aplicar una compresión horizontal extrema $f(10x)$?
8. Compare $y = 4\sqrt{x}$ con $y = \sqrt{16x}$. ¿Producen exactamente la misma gráfica final? Demuéstrelo algebraicamente.
9. Al transformar $f(x)$ en $-f(-x)$, estamos combinando dos reflexiones. ¿A qué tipo de simetría fundamental equivale esto geométricamente?
10. ¿Por qué la transformación $y = 0 \cdot f(x)$ anula cualquier modelo y colapsa la función al eje X?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Si $f(x) = x^3$, escriba la ecuación estirada verticalmente por 4.

Guía de Solución Interactiva

1. El estiramiento es vertical, afecta el ________ (exterior/interior).
2. La constante a vale _____.
3. Multiplicamos la función madre: $y =$ _____x^3.

Problema 2. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, escriba la ecuación reflejada sobre el eje Y.

Guía de Solución Interactiva

1. La reflexión en el eje Y requiere un signo negativo ________ (dentro/fuera).
2. Sustituimos la variable x por _____.
3. La ecuación final es $y = \frac{1}{\_\_\_\_\_}$.

Problema 3. Comprima horizontalmente $h(x) = \sqrt{x}$ por un factor de $1/3$.

Guía de Solución Interactiva

1. Compresión horizontal afecta el interior. El factor deseado es $1/3$.
2. El número b a multiplicar debe ser el ________ de $1/3$, que es _____.
3. La ecuación transformada es $y = \sqrt{\_\_\_\_\_ x}$.

PROFE TEO

Recuerda la jerarquía geométrica: Una dilatación combinada con una reflexión $y = -2f(x)$ invierte la curva y además la hace más alta o estrecha visualmente.

Problemas Generales

Problema 4. Escriba $f(x) = x^2$ reflejada en X y estirada verticalmente por 5.

Problema 5. Si el dominio de $g(x)$ es $[2, 8]$, halle el dominio de $g(2x)$.

Problema 6. Si el rango de $h(x)$ es $[-3, 7]$, halle el rango de $-h(x)$.

Problema 7. El punto $(6, -2)$ está en $f(x)$. ¿Dónde aterriza en $f(x/2)$?

Problema 8. Escriba la ecuación de $y = |x|$ comprimida verticalmente a la cuarta parte.

Problema 9. Indique la diferencia gráfica entre $y = (-x)^2$ y $y = -x^2$.

Problema 10. Simplifique la ecuación de $y = x^3$ reflejada en el eje Y.

Problema 11. Halle los interceptos de la curva $y = -\sqrt{x}$.

Problema 12. El punto $(1, 4)$ está en $f(x)$. ¿Dónde está en $y = -3f(x)$?

Problema 13. Exprese $y = \frac{1}{x}$ comprimida horizontalmente por $1/5$.

Problema 14. Determine si $y = f(-x)$ cambia el intercepto en el eje Y de la original.

Problema 15. Escriba la ecuación de la identidad $y = x$ estirada verticalmente por 7.

Problema 16. Si el área bajo $f(x)$ es 10, intuitivamente, ¿cuál será el área bajo $2f(x)$?

Problema 17. El vértice de $f(x)$ es $(3, 5)$. Halle el vértice de $y = f(-x)$.

Problema 18. Exprese $y = x^4$ con una reflexión en X y otra en Y simultáneamente.

Problema 19. Si $\text{Ran}(f) = [0, \infty)$, halle el rango de $y = -f(x)$.

Problema 20. El punto (a, b) está en $f(x)$. ¿Qué punto está en $y = -f(-x)$?

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Una bacteria se multiplica según $B(t) = t^2$. Un inhibidor reduce el crecimiento total a la tercera parte. Modele el crecimiento frenado.

Guía de Solución Interactiva

1. Reducir el total es un cambio __________ (vertical/horizontal). 2. La tercera parte equivale a multiplicar por el factor _____. 3. La función ajustada es $B_m(t) =$ __________.

Problema 2. Un resorte oscila con fuerza $F(x) = \sqrt{x}$. Se tensa la cuerda acelerando el proceso, haciendo que oscile cuatro veces más rápido en el tiempo.

Guía de Solución Interactiva

1. Hacerlo más rápido comprime el evento en el eje __________. 2. El factor de compresión es 1/4, por lo que multiplicamos a la variable por _____. 3. El modelo de fuerza acelerada es $F_a(x) =$ __________.

Problema 3. Una criptomoneda eleva su valor por $V(d) = d^3$. Un hackeo catastrófico invierte la tendencia de ganancias convirtiendo el saldo en deuda pura simétrica.

Guía de Solución Interactiva

1. Invertir ganancias a deudas implica reflejar sobre el eje _____. 2. La reflexión coloca un signo __________ afuera de la función. 3. La gráfica de ruina se expresa como $V_h(d) =$ __________.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una prensa hidráulica ejerce presión $P(v) = v^2$. Se cambian los cilindros por unos reforzados que quintuplican la fuerza de impacto total. Modele la potencia bruta.

Problema 5. El perfil de un alerón aerodinámico dicta $A(x) = \frac{1}{x}$. El fabricante aplasta el diseño verticalmente al diez por ciento para un bólido. Plantee la curvatura.

Problema 6. La migración de una especie aumenta mediante $M(t) = t^3$. Una barrera natural frena la migración, dilatando el evento demográfico al doble de tiempo original. Genere la fórmula.

Problema 7. El prisma capta luz bajo índice $I(\lambda) = |\lambda|$. El cristal es montado al revés, invirtiendo la recepción en el eje direccional interno del material óptico.

Problema 8. El choque de placas tectónicas irradia fuerza $S(d) = d^4$. Un estrato de arcilla amortigua y reduce la amplitud sísmica transversal a una octava parte.

Problema 9. El calor irradiado por un disipador es $H(x) = x^2$. Un ventilador de grado militar extrae la energía, reflejando el calor base hacia temperaturas negativas.

Problema 10. La órbita de un cometa aparenta curva $O(x) = \sqrt{x}$. El lente telescópico la estira visualmente en el plano horizontal por un factor multiplicativo de seis.

Problema 11. Un fármaco se absorbe con velocidad $A(t) = t^3$. Una cubierta gástrica especial en la cápsula ralentiza la dilución, estirando la absorción temporal a la mitad.

Problema 12. La trayectoria del pivote robótico sube según $y = |x|$. Un fallo en los servos invierte totalmente la articulación, apuntando los brazos de manera cóncava inferior.

Problema 13. La reverberación de un auditorio rebota $E(s) = \frac{1}{s}$. Se instalan paneles que comprimen el espacio sonoro horizontalmente, reduciendo los tiempos de choque a un cuarto.

Problema 14. Un sistema de riego esparce agua radialmente $R(t) = \sqrt{t}$. El aumento de presión en la bomba cuadruplica el alcance global del chorro emitido en el huerto.

Problema 15. La aleación de zinc solidifica bajo tensión $T(h) = h^2$. El enfriamiento criogénico súbito voltea el proceso de cristalización térmico horizontalmente como un espejo perfecto temporal.

Problema 16. Las señales de un satélite emiten pulsos $P(x) = x^3$. La interferencia solar triplica brutalmente el tamaño y longitud horizontal de cada onda de radio espacial.

Problema 17. El gradiente barométrico registra $B(z) = |z|$. Un frente de baja presión altera la brújula y refleja la caída atmosférica vertical hacia índices barométricos negativos directos.

Problema 18. La falla geológica subduce por $F(d) = d^4$. El manto de magma comprime la grieta geológica en el eje de profundidad a una novena parte exacta.

Problema 19. La corriente alterna varía según fase $I(t) = \sin(t)$. El transformador duplica el voltaje pico de la onda senoidal pero sin afectar el período cíclico original.

Problema 20. El embotellamiento avanza por la autovía $T(h) = \frac{1}{h^2}$. Un retén de patrullaje comprime el avance de los autos horizontalmente a un décimo de su fluidez.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $y = 4x^3$
2. $y = \frac{1}{-x}$
3. $y = \sqrt{3x}$
4. $y = -5x^2$
5. $[1, 4]$
6. $[-7, 3]$
7. $(12, -2)$
8. $y = \frac{1}{4}|x|$
9. $(-x)^2$ no cambia, $-x^2$ invierte U.
10. $y = -x^3$
11. $(0, 0)$
12. $(1, -12)$
13. $y = \frac{1}{5x}$
14. No cambia ($x = 0$ sigue 0).
15. $y = 7x$
16. 20
17. $(-3, 5)$
18. $y = -(-x)^4 = -x^4$
19. $(-\infty, 0]$
20. $(-a, -b)$

Propuestos de Aplicación

1. $B_m(t) = \frac{1}{3}t^2$
2. $F_a(x) = \sqrt{4x}$
3. $V_h(d) = -d^3$
4. $P_m(v) = 5v^2$
5. $A_m(x) = 0{,}10\left(\frac{1}{x}\right)$
6. $M_m(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^3$
7. $I_r(\lambda) = |-\lambda|$
8. $S_m(d) = \frac{1}{8}d^4$
9. $H_r(x) = -x^2$
10. $O_e(x) = \sqrt{\frac{x}{6}}$
11. $A_r(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^3$
12. $y = -|x|$
13. $E_c(s) = \frac{1}{4s}$
14. $R_m(t) = 4\sqrt{t}$
15. $T_c(h) = (-h)^2$
16. $P_e(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3$
17. $B_r(z) = -|z|$
18. $F_c(d) = (9d)^4$
19. $I_m(t) = 2\sin(t)$
20. $T_c(h) = \frac{1}{(10h)^2}$

Reflejo

¡Llegaste al Final!

'Conocer las intersecciones te dice dónde estás parado, pero reconocer las compresiones te permite saber a qué velocidad avanza el universo.'

- La belleza de la deformación

¡Felicidades! Has roto las barreras de las transformaciones. Ahora sabes cómo estirar los límites del álgebra y proyectar tus ecuaciones en cualquier dirección.

∞

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com