$P(c) = R$

$\Longleftrightarrow$ R

PRECÁLCULO

TEOREMAS DEL RESIDUO Y FACTOR

CUADERNO DE TRABAJO

Aplicaciones para encontrar raíces polinomiales

$(x - c)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Atajo Maestro

En matemáticas superiores, no siempre necesitamos realizar divisiones gigantescas para conocer lo que "sobra". Existen dos teoremas hermanos que nos permiten evaluar polinomios rápidamente y, más importante aún, descubrir sus raíces (o ceros) ocultos.

1. El Teorema del Residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre un binomio lineal de la forma $\boldsymbol{(x-c)}$, entonces el residuo R de esa división es exactamente igual al valor del polinomio evaluado en c.

$$R = P(c)$$

Ojo: Si el divisor es $(x+3)$, debes evaluar $P(-3)$. ¡El signo de c siempre se invierte!

PROFE TEO

El Teorema del Residuo es magia pura: Evaluar $P(x)$ en $x=c$ da exactamente el mismo número que hacer tooooda la división de $P(x)$ entre $(x-c)$. ¡Te ahorras la tabla sintética!

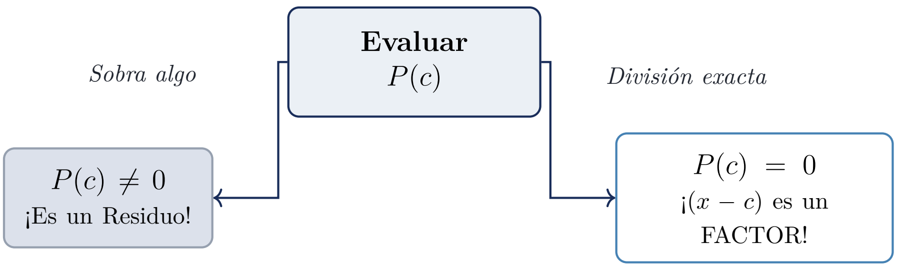
2. El Teorema del Factor

Un polinomio $P(x)$ tiene un factor exacto $\boldsymbol{(x-c)}$ **sí y solo sí** $P(c)=0$.

- Si compruebas que $P(c)=0$, automáticamente sabes que $x=c$ es una **raíz** o intercepto en X.
- Saber que $(x-c)$ es factor te permite aplicar división sintética para degradar (bajar el grado) del polinomio y encontrar el resto de las raíces.

PROFE TEO

Para que un binomio sea un "Factor", debe caber de manera exacta. Es como decir que 2 es factor de 10 porque no sobra nada. ¡El residuo debe ser cero absoluto!



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Aplicación Directa del Residuo

Enunciado: Halle el residuo de dividir $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ entre $(x - 2)$.
Esquema de Solución: Usamos el Teorema del Residuo. $c = 2$.

$$P(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) + 3$$
$$\downarrow$$
$$P(2) = 8 - 16 + 10 + 3$$
$$\downarrow$$
$$P(2) = 5$$

Respuesta: El residuo es 5.

Problema Resuelto 2: Comprobación del Factor

Enunciado: Verifique si $(x+1)$ es un factor de $P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$.
Esquema de Solución: Evaluamos $c = -1$.

$$P(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 1$$
$$\downarrow$$
$$P(-1) = 1 - 3 + 2 - 1 + 1$$
$$\downarrow$$
$$P(-1) = 0$$

Respuesta: Como el residuo es cero, $(x + 1)$ **sí** es un factor.

Problema Resuelto 3: Hallar Coeficiente Desconocido

Enunciado: Determine el valor de k si $(x^3 - kx^2 + 4x - 2) \div (x - 1)$ deja resto 5.
Esquema de Solución: $P(1) = 5$.

$$(1)^3 - k(1)^2 + 4(1) - 2 = 5$$
$$\downarrow$$
$$1 - k + 4 - 2 = 5$$
$$\downarrow$$
$$3 - k = 5 \implies k = -2$$

PROFE TEO
¡Clásico de exámenes! Te ocultan un número del polinomio con una letra "k", pero te regalan el residuo. Solo plantea la ecuación $P(c) =$ Residuo y despeja "k".

Problema Resuelto 4: Descubrir 'k' por Teorema del Factor

Enunciado: Halle k sabiendo que $(x+2)$ es factor exacto de x^3+kx^2-x-6.
Esquema de Solución: Si es factor, $P(-2)=0$.

$$(-2)^3+k(-2)^2-(-2)-6=0$$
$$\downarrow$$
$$-8+4k+2-6=0$$
$$\downarrow$$
$$4k-12=0 \implies k=3$$

Problema Resuelto 5: Factorización Completa Degrada

Enunciado: Factorice completamente $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ sabiendo que $P(2)=0$.
Esquema de Solución: Como $P(2)=0$, $(x-2)$ es factor. Usamos sintética para degradar.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline & & 2 & -4 & -6 \\ & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

El cociente es x^2-2x-3. Factorizamos el trinomio: $(x-3)(x+1)$.
Factores finales: $(x-2)(x-3)(x+1)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Error de Calibración Balística

Contexto: Un proyectil sigue un desvío $E(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. La zona de choque virtual representa el divisor $x - 3$. Estime el margen de error residual.
Esquema de Solución: Evaluamos $c = 3$.

$$E(3) = (3)^3 - 2(3)^2 + 5$$
$$\downarrow$$
$$E(3) = 27 - 18 + 5 = 14$$

Respuesta: El margen de error residual en el impacto es 14 unidades.

Aplicación 2: Ciberseguridad Criptográfica

Contexto: Un paquete encriptado $H(k) = k^3 - 7k + 6$ exige que el bloque $k - 2$ sea un factor exacto para aprobar la seguridad. Verifique el acceso.
Esquema de Solución: Verificamos si $H(2) = 0$.

$$H(2) = (2)^3 - 7(2) + 6$$
$$\downarrow$$
$$H(2) = 8 - 14 + 6 = 0$$

Respuesta: Como el residuo es cero absoluto, el paquete aprueba el acceso de seguridad.

Aplicación 3: Deficiencia Fotovoltaica

Contexto: Un panel solar acusa una fuga energética $D(t) = 2t^4 - t^2 + 3t - 10$. El sensor testea el momento $t + 1$. Calcule el déficit eléctrico fugado.
Esquema de Solución: El momento $t + 1$ implica evaluar $c = -1$.

$$D(-1) = 2(-1)^4 - (-1)^2 + 3(-1) - 10$$
$$\downarrow$$
$$D(-1) = 2 - 1 - 3 - 10 = -12$$

Respuesta: Se registra un déficit eléctrico de -12 vatios.

PROFE TEO

En ciencias, comprobar que "la división es exacta"(Teorema del Factor) nos dice cuándo un reactivo se neutraliza o un puente deja de oscilar. $P(c) = 0$ es el Santo Grial.

Aplicación 4: Titulación Química

Contexto: El volumen ácido es $V(c) = c^3 + kc^2 - 5c + 6$. Logra neutralización perfecta (residuo nulo) frente al catalizador $c - 1$. Deduzca el balance 'k'.
Esquema de Solución: $V(1) = 0$.

$$(1)^3 + k(1)^2 - 5(1) + 6 = 0$$
$$\downarrow$$
$$1 + k - 5 + 6 = 0 \implies k = -2$$

Respuesta: El coeficiente de balance ácido 'k' es exactamente -2.

Aplicación 5: Cancelación de Ruido

Contexto: Una onda acústica se modela por $O(f) = f^3 - 3f^2 - 4f + 12$. Confirme matemáticamente si un filtro ajustado en la frecuencia $f = 2$ anula el sonido.
Esquema de Solución: Evaluamos si $O(2) = 0$.

$$O(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 4(2) + 12$$
$$\downarrow$$
$$O(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$$

Respuesta: Efectivamente, la onda residual es cero, anulando el sonido por completo.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento analítico.

1. Si el Teorema del Residuo es tan veloz, ¿por qué los matemáticos seguimos enseñando la división larga o sintética tradicional? ¿Qué nos roba.$^{\text{es}}$te teorema rápido?
2. Evalúe el error de un estudiante que, para dividir $P(x)$ entre $(x+4)$, calcula $P(4)$ en lugar de $P(-4)$. ¿Qué está encontrando realmente?
3. Si $P(5) = 0$, indique directamente un binomio que sea factor de $P(x)$ y otro que no lo sea, justificando su respuesta.
4. Geométricamente, si verificamos mediante el teorema del factor que $(x-7)$ es un factor exacto, ¿qué ocurre en el plano cartesiano en la coordenada $x = 7$?
5. Explique por qué el Teorema del Residuo no puede utilizarse directamente para calcular el remanente si el divisor es cuadrático, como (x^2+1).
6. Si un polinomio de grado 3 tiene como factores a $(x-1)$ y $(x+2)$, ¿cuántos factores lineales adicionales le pueden faltar como máximo dentro del campo de los reales?
7. Un polinomio $P(x)$ tiene un término constante de -15. ¿Es posible que $(x-2)$ sea un factor asumiendo que todos los coeficientes son enteros? (Pista: raíces racionales).
8. Si evaluamos $P(0)$ y obtenemos 8, ¿qué información hemos descubierto simultáneamente sobre la gráfica de la función?
9. El teorema del residuo afirma que $R = P(c)$. Argumente lógicamente basándose en el algoritmo de la división $P(x) = (x-c)Q(x) + R$ por qué ocurre esto al hacer $x = c$.
10. En un contexto empresarial de ganancias $G(x)$, ¿qué interpretación lógica tendría que el binomio representativo del mes 3, $(x-3)$, sea un factor exacto de la ecuación?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule el residuo de $P(x) = x^4 - 2x^3 + x - 5$ entre $(x - 3)$.

Guía de Solución Interactiva

Aplica el esquema evaluando directamente $c = 3$:

$$P(\_\_\_\_\_) = (\_\_\_\_\_)^4 - 2(\_\_\_\_\_)^3 + (\_\_\_\_\_) - 5$$
$$\downarrow$$
$$P(3) = \_\_\_\_\_ - 2(\_\_\_\_\_) + 3 - 5$$
$$\downarrow$$
$$P(3) = \_\_\_\_\_ - 54 - 2 = \_\_\_\_\_\_\_$$

Problema 2. Verifique mediante el teorema si $(x+2)$ es factor de x^3+5x^2+2x-8.

Guía de Solución Interactiva

Evalúa invirtiendo el signo a $c = -2$:

$$P(\_\_\_\_\_) = (\_\_\_\_\_)^3 + 5(\_\_\_\_\_)^2 + 2(\_\_\_\_\_) - 8$$
$$\downarrow$$
$$P(-2) = \_\_\_\_\_ + 5(\_\_\_\_\_) - 4 - 8$$
$$\downarrow$$
Suma: $-8 + 20 - 12 = \_\_\_\_\_$. **¡(Es / No es) factor!**

Problema 3. Halle k si $(x - 1)$ deja resto 4 en $P(x) = kx^3 - 3x^2 + kx + 1$.

Guía de Solución Interactiva

Iguala la evaluación de $P(1)$ al residuo 4:

$$k(\_\_\_\_\_)^3 - 3(\_\_\_\_\_)^2 + k(\_\_\_\_\_) + 1 = \_\_\_\_\_$$
$$\downarrow$$
$$k - \_\_\_\_\_ + k + 1 = 4$$
$$\downarrow$$
$$2k - \_\_\_\_\_ = 4 \implies 2k = \_\_\_\_\_ \implies k = \_\_\_\_\_$$

PROFE TEO

Para degradar funciones de grado 3, debes usar primero el teorema del factor para hallar la primera raíz .ª ojo.º probando números. ¡Luego usas sintética para hallar la cuadrática sobrante!

Problemas Generales

Problema 4. Calcule el residuo de $(3x^4 - 5x^2 + x - 2) \div (x + 1)$.

Problema 5. Determine si $(x - 4)$ es factor de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 12$.

Problema 6. Halle el resto de evaluar $P(x) = x^5 - 3x^3 + 2$ dividido entre $x + 2$.

Problema 7. Halle k sabiendo que $(x - 2)$ es factor exacto de $2x^3 - kx^2 + x + 6$.

Problema 8. Si $(x^3 - 2x^2 + kx - 5) \div (x - 3)$ da resto 10, descubra el valor k.

Problema 9. Aplique el teorema para hallar el residuo de $x^{100} - 4x^{99} + 3$ entre $(x - 1)$.

Problema 10. Demuestre que $x = -3$ es una raíz de $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$.

Problema 11. Halle la variable 'a' si $P(-1) = 0$ para $P(x) = ax^3 + 2x^2 - 5x - a$.

Problema 12. Factorice $x^3 - 7x + 6$ sabiendo de antemano que $P(1) = 0$.

Problema 13. Si $P(x)$ es dividido por x, el residuo es 7. ¿Cuál es el término independiente de $P(x)$?

Problema 14. Determine m y n si $x^3 + mx^2 + nx - 6$ es divisible por $(x - 1)$ y $(x + 2)$.

Problema 15. Factorice completamente $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ testeando factores para hallar la primera raíz.

Problema 16. Pruebe si $(x - \sqrt{2})$ es factor de $x^3 - 2x^2 - 2x + 4$.

Problema 17. Halle el residuo al dividir $x^{50} + 1$ entre $x + 1$.

Problema 18. Si un polinomio deja resto 3 al dividir entre $(x - 2)$, ¿cuánto valdrá $P(2)^2 + 4$?

Problema 19. Si $(x - a)$ es factor de $x^3 - a^2x + x - a$, halle posibles valores de a.

Problema 20. Encuentre la raíz faltante de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, sabiendo que $x = 1$ y $x = 2$ son raíces.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un brazo robótico desvía su pinza en milímetros $D(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Pruebe si en la coordenada $x = 2$ la desviación se anula logrando precisión perfecta.

Guía de Solución Interactiva

Completa la evaluación para el teorema del factor:

$$D(\underline{\qquad}) = (\underline{\qquad})^3 - 4(\underline{\qquad})^2 + (\underline{\qquad}) + 6$$
$$\downarrow$$
$$D(2) = \underline{\qquad} - \underline{\qquad} + 2 + 6$$
$$\downarrow$$

Resultado: _____. ¡La desviación (se anula / falla)!

Problema 2. El dron agrícola esparce fertilizante perdiendo mililitros $P(t) = 3t^4 - t^3 - 10$. El sensor testea el segundo $t = -1$. Calcule la fuga química reportada.

Guía de Solución Interactiva

Aplica el teorema del residuo evaluando el polinomio en $t = -1$:

$$P(\underline{\qquad}) = 3(\underline{\qquad})^4 - (\underline{\qquad})^3 - 10$$
$$\downarrow$$
$$P(-1) = 3(\underline{\qquad}) - (\underline{\qquad}) - 10$$
$$\downarrow$$

Fuga reportada: $\underline{\qquad} + 1 - 10 = \underline{\qquad}$ **ml.**

Problema 3. Un servidor cifra contraseñas con el bloque $H(k) = k^3 - ak^2 + 5$. Requiere que la clave de prueba $k = 2$ devuelva un resto algorítmico de 7. Precise la constante 'a'.

Guía de Solución Interactiva

Iguala la evaluación al residuo exigido:

$$(\underline{\qquad})^3 - a(\underline{\qquad})^2 + 5 = 7$$
$$\downarrow$$
$$\underline{\qquad} - \underline{\qquad}a + 5 = 7$$
$$\downarrow$$
$$-4a + \underline{\qquad} = 7 \implies -4a = \underline{\qquad} \implies a = \underline{\qquad}$$

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una cápsula presurizada soporta microfisuras $F(p) = p^4 + 3p^2 - 10$. El vacío espacial choca en la unidad $p-1$. Evalúe la fractura estructural en milímetros resultante.

Problema 5. El caudal de savia hidropónica fluye erráticamente $C(h) = h^3 - 7h + 6$. Ingrese el momento radicular $h = 1$ verificando si la absorción alcanza equilibrio absoluto.

Problema 6. La criptomoneda colapsa algoritmos quemando bloques $B(c) = c^3 + kc^2 - c - 2$. Se anula perfectamente en el ciclo $c = -2$. Estime la variable de red 'k'.

Problema 7. El láser oftalmológico desvía micrones lumínicos $D(m) = m^5 - m^3 + 2m - 1$. Cruza el cristalino en $m = -1$. Deduzca la aberración óptica residual en la retina.

Problema 8. Una torre eólica acumula fatiga metálica $F(v) = v^3 - 6v^2 + 11v - 6$. Analice las ráfagas en $v = 3$ para confirmar si la tensión estructural llega a nivel cero.

Problema 9. El reactor biológico muta bacterias $M(t) = 2t^3 - t^2 + 3t - 5$. La radiación uv interviene en fase $t = 2$. Calcule la biomasa excedente no purificada.

Problema 10. Un tren magnético roza rieles gastando superconductores $S(x) = x^4 - 16$. El imán polar empuja tramos $x = 2$. Certifique matemáticamente la fricción nula del vehículo levitante.

Problema 11. La placa tectónica desplaza milímetros $P(s) = s^3 + ks - 8$. Alerta un epicentro estático perfecto usando escala $s = 2$. Extraiga la constante sísmica subterránea de la falla.

Problema 12. El radar intercepta misiles marcando desfases $R(d) = d^4 - 5d^2 + 4$. La ojiva cruza el paralelo $d = -2$. Corrobore el contacto balístico exento de margen de error.

Problema 13. La impresora 3D inyecta filamento modelando volumen $V(e) = e^3 - e^2 - e + 1$. El cabezal evalúa extrusión $e = 1$. Garantice la impresión sin rebabas sobrantes.

Problema 14. Un lente astronómico capta fotones sumando ruido $N(f) = f^{10} - 3f^9 + 2$. La nebulosa transmite frecuencia $f = 3$. Cuantifique la polución lumínica interestelar grabada en la toma.

Problema 15. El sonar mapea cavernas marinas reportando lodo $L(p) = p^3 - mp^2 + 2p + 4$. El fondo arenoso devuelve rebote en $p = -1$ con residuo 3. Aísle el factor geológico 'm'.

Problema 16. Las turbinas jet consumen queroseno $Q(v) = v^4 - v^3 - v^2 - v - 2$. El flujo aerodinámico alcanza fase $v = 2$. Identifique si el tanque quema combustible sin dejar mermas.

Problema 17. Un cultivo genético replica cadenas de adn $A(g) = g^5 + 32$. La enzima tijera recorta el genoma $g = -2$. Confirme la secuencia de clonación biomédica libre de mutaciones erráticas.

Problema 18. El ascensor neumático pierde presión valvular $P(h) = h^3 - 7h - 6$. El sensor altimétrico revisa la cabina en nivel $h = 3$. Certifique la llegada al piso sin fugas atmosféricas.

Problema 19. La hidroeléctrica genera vórtices turbulentos $T(c) = c^3 + c^2 - 10c + 8$. La compuerta canaliza agua en fase $c = 2$. Declare la corriente purificada carente de choque hidráulico.

Problema 20. El microchip recalienta nanómetros quemando silicio $S(n) = n^4 - bn^2 + 4$. La refrigeración líquida exige disipación total evaluando tolerancia $n = \sqrt{2}$. Detalle el coeficiente térmico 'b' obligatorio de fábrica.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $P(3) = 25$.
2. $P(-2) = 0 \implies$ Sí es factor.
3. $k = 3$.
4. Residuo -5.
5. $P(4) = 0 \implies$ Sí es factor.
6. Residuo -6.
7. $k = 6$.
8. $k = 2$.
9. Residuo 0.
10. $f(-3) = 81 - 81 - 9 + 12 - 3 = 0$. Raíz.
11. $a = -7/2$.
12. $(x-1)(x-2)(x+3)$.
13. Termino indep. $= 7$.
14. $m = 4$, $n = 1$.
15. $(x-1)(x+3)(2x-1)$.
16. Sí, resto 0.
17. Residuo 2.
18. $3^2 + 4 = 13$.
19. $a \in \mathbb{R}$ (se anula).
20. La raíz faltante es $x = 3$.

Propuestos de Aplicación

1. $D(2) = 0 \implies$ Anulación.
2. $P(-1) = -6$ ml de fuga.
3. $a = 2$.
4. $F(1) = -6$ mm.
5. $C(1) = 0 \implies$ Equilibrio.
6. $k = 1$.
7. $D(-1) = -3$ micrones.
8. $F(3) = 0 \implies$ Tensión cero.
9. $M(2) = 13$ unidades.
10. $S(2) = 0 \implies$ Fricción nula.
11. $k = 0$.
12. $R(-2) = 0 \implies$ Margen nulo.
13. $V(1) = 0 \implies$ Impresión limpia.
14. $N(3) = 2$ fotones sucios.
15. $m = -2$.
16. $Q(2) = 0 \implies$ Combustión perfecta.
17. $A(-2) = 0 \implies$ Clonación sin mutación.
18. $P(3) = 0 \implies$ Cero fugas.
19. $T(2) = 0 \implies$ Corriente purificada.
20. $b = 4$.

$\rightarrow 0$

¡Llegaste al Final!

'No siempre necesitas recorrer todo el largo camino para saber lo que te espera al final. Un buen matemático sabe evaluar la situación antes de lanzarse a dividir fuerzas.'

- La eficiencia del teorema

¡Felicidades! Has dominado el atajo definitivo para encontrar raíces polinomiales. Ya puedes predecir sobras y descubrir factores exactos en un parpadeo.

✓

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com