CÁLCULO DE UNA VARIABLE

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

CUADERNO DE TRABAJO

TVI y Existencia de Raíces

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: La Magia de la Existencia

Hay ecuaciones matemáticas tan complejas que es imposible despejar x algebraicamente (como $\cos(x) = x$). Sin embargo, gracias a la continuidad, podemos demostrar que una solución **existe** de manera irrefutable usando el **Teorema del Valor Intermedio (TVI)**.

PROFE TEO

¡El TVI es como un radar! No te dice las coordenadas exactas del objetivo (la raíz), pero te garantiza al 100 % que el objetivo está en esa zona.

1. Enunciado Formal del TVI

Suponga que f es una función **continua** en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sea k cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces, existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que:

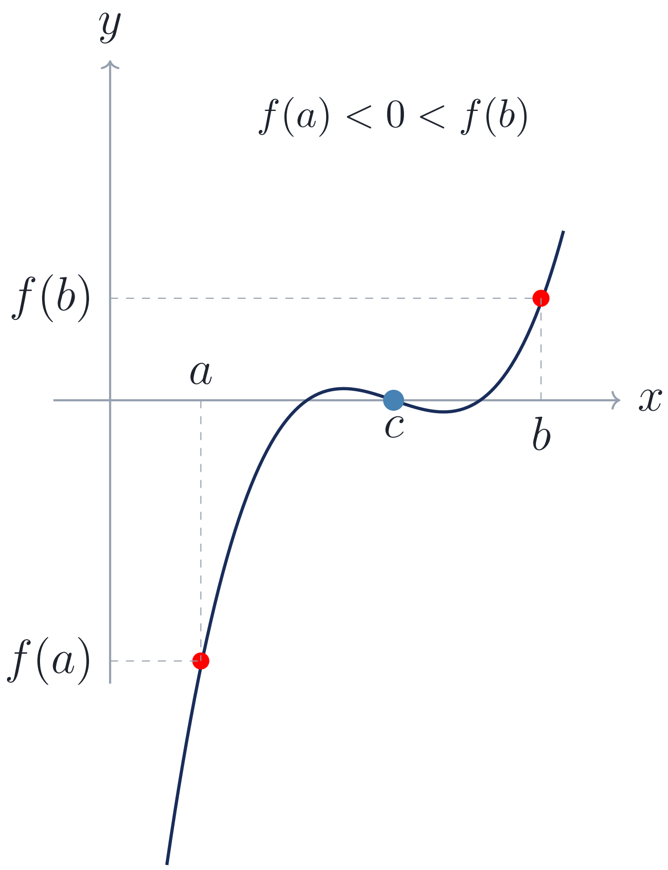
$$f(c) = k$$

2. Corolario: El Teorema de Bolzano (Existencia de Raíces)

Una aplicación directa del TVI ocurre cuando $k = 0$. Si f es continua en $[a, b]$ y los valores en los extremos tienen **signos opuestos** (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces la gráfica de la función obligatoriamente cruza el eje X. Por lo tanto, existe al menos una raíz $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

PROFE TEO

La continuidad es innegociable. Si la función pega un salto o tiene una asíntota vertical en el intervalo, podría saltarse el eje X sin tocarlo. ¡Verifica siempre el dominio!



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Polinomio Básico

Enunciado: Demuestre que $f(x) = x^3 - 4x + 1$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1, 2]$.
Solución: 1. La función es un polinomio, por lo tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$, incluyendo $[1, 2]$. 2. Evaluamos los extremos del intervalo: $f(1) = (1)^3 - 4(1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$. $f(2) = (2)^3 - 4(2) + 1 = 8 - 8 + 1 = 1 > 0$. 3. Como $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, el cero está entre $f(1)$ y $f(2)$. Por el TVI, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

PROFE TEO
Para demostrar que dos gráficas se cortan ($f(x) = g(x)$), el truco supremo es crear una nueva función: $h(x) = f(x) - g(x)$ y buscarle una raíz.

Problema Resuelto 2: Ecuación Trascendente

Enunciado: Pruebe que la ecuación $\cos(x) = x$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.
Solución: 1. Definimos una nueva función: $h(x) = \cos(x) - x$. Es continua en $\mathbb{R}$. 2. Evaluamos en los extremos (usando radianes): $h(0) = \cos(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$. $h(1) = \cos(1) - 1 \approx 0{,}54 - 1 = -0{,}46 < 0$. 3. Hay un cambio de signo ($h(0) > 0$ y $h(1) < 0$). Por el TVI, existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$, lo que implica $\cos(c) = c$.

Problema Resuelto 3: Intersección Exponencial-Algebraica

Enunciado: Demuestre que las gráficas de $y = e^x$ e $y = 3 - x$ se intersecan.
Solución: 1. Se intersecan si $e^x = 3 - x$. Definimos $f(x) = e^x + x - 3$. Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$. 2. Buscamos un intervalo de prueba empíricamente: $f(0) = e^0 + 0 - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$. $f(1) = e^1 + 1 - 3 = e - 2 \approx 2{,}71 - 2 = 0{,}71 > 0$. 3. Como $f(0) \cdot f(1) < 0$, el TVI garantiza una raíz en $(0, 1)$, es decir, un punto de intersección.

Problema Resuelto 4: Cuidado con el Dominio

Enunciado: ¿Tiene la ecuación $\frac{1}{x-2} = x^2$ solución en $[1, 3]$?
Solución: 1. Sea $f(x) = x^2 - \frac{1}{x-2}$. 2. Evaluamos: $f(1) = 1 - (-1) = 2 > 0$. $f(3) = 9 - 1 = 8 > 0$. ¡Atención! La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$, que pertenece al intervalo $[1, 3]$. La función **no es continua** en $[1, 3]$, por lo tanto, no podemos aplicar el TVI en ese intervalo (aunque pudiera existir solución, el TVI no la garantiza ahí).

PROFE TEO
Cuidado al usar intervalos aleatorios. A veces hay raíces, pero el intervalo elegido es muy grande y los extremos resultan con el mismo signo. ¡Prueba cerrando el intervalo!

Problema Resuelto 5: Valor Intermedio distinto de Cero

Enunciado: Un monje sube una montaña el lunes de 8am a 8pm. El martes baja por el mismo camino de 8am a 8pm. Demuestre que hay una hora exacta en la que está a la misma altura ambos días.

Solución: Sea $S(t)$ la posición al subir y $B(t)$ al bajar ($t \in [8, 20]$). Definimos $D(t) = S(t) - B(t)$. Es continua. A las 8am: $D(8) = S(8) - B(8) = \text{Base} - \text{Cima} < 0$. A las 8pm: $D(20) = S(20) - B(20) = \text{Cima} - \text{Base} > 0$. Por el TVI, existe un tiempo c donde $D(c) = 0$, es decir, $S(c) = B(c)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Enfriamiento Metalúrgico

Contexto: Un lingote de acero sale del horno a 800 grados Celsius y se enfría en una cámara hasta alcanzar los 25 grados. Justifique matemáticamente por qué el metal tuvo que registrar exactamente 400 grados durante el proceso de estabilización.
Solución: La temperatura $T(t)$ es una función física continua. El intervalo de temperaturas va de $T_{ini} = 800$ a $T_{fin} = 25$. Dado que $25 < 400 < 800$, el TVI garantiza que existe un tiempo c donde $T(c) = 400$°C.

PROFE TEO
Cualquier variable física macroscópica (tiempo, distancia, temperatura, velocidad) cambia de forma continua. ¡El TVI es el rey de la física clásica!

Aplicación 2: Ascenso de Dron

Contexto: Un dron topográfico despega desde el nivel del suelo cero y alcanza una altitud de inspección de quinientos metros. ¿Es posible afirmar que su altímetro marcó exactamente el valor de trescientos catorce metros durante el vuelo?
Solución: La altura $H(t)$ es continua. En el despegue $H(0) = 0$. En el ápice $H(t_f) = 500$. Como $0 < 314 < 500$, el Teorema del Valor Intermedio certifica que alcanzó los 314 metros.

Aplicación 3: Presión de Tolva

Contexto: Una tolva industrial inicia vacía con presión manométrica nula. Al llenarse de escombros, el sensor marca treinta atmósferas. Argumente por qué la presión cruzó inexorablemente la barrera crítica de calibración de quince atmósferas.
Solución: La presión interna $P(t)$ se acumula continuamente. Evaluamos los límites físicos: $P_{min} = 0$ y $P_{max} = 30$. Como 15 es un valor intermedio ($0 < 15 < 30$), por el TVI, existe un instante de presión crítica.

Aplicación 4: Equilibrio Financiero

Contexto: Una startup tecnológica reportó un déficit financiero de cien mil dólares en enero. Para diciembre del mismo año fiscal, la cuenta consolidada arrojó un superávit de cincuenta mil. Confirme si existió un día de saldo estrictamente nulo.
Solución: El balance $B(t)$ evoluciona continuamente de manera macroeconómica. $B(Enero) = -100,000$ (Negativo). $B(Diciembre) = +50,000$ (Positivo). Al haber un cambio de signo, el TVI confirma que existió un punto de equilibrio $B(c) = 0$.

Aplicación 5: Cultivo Bacteriano

Contexto: La biomasa de una placa de Petri mutante pesaba dos microgramos al inyectar el reactivo. Tras veinticuatro horas, el microscopio registró nueve microgramos. Compruebe que la colonia midió exactamente el número irracional pi microgramos.

Solución: El crecimiento de biomasa $M(t)$ es continuo. Sabemos que $M(0) = 2$ y $M(24) = 9$. Como el número $\pi \approx 3{,}14159$ está entre 2 y 9, el TVI garantiza categóricamente que $M(c) = \pi$ ocurrió.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Si evaluamos una función en $[a, b]$ y encontramos que $f(a)$ y $f(b)$ son ambos positivos, ¿esto demuestra concluyentemente que no existen raíces en ese intervalo? Justifique.

2. Argumente por qué el Teorema del Valor Intermedio se clasifica como un teorema "de existenciaz no como un teorema çonstructivo"para hallar soluciones.

3. Explique lógicamente por qué la exigencia de **continuidad** en el TVI debe cumplirse estrictamente en el intervalo cerrado $[a, b]$ y no solo en el abierto.

4. Un compañero intenta demostrar que $f(x) = \tan(x)$ tiene una raíz en $[\pi/4, 3\pi/4]$ porque $f(\pi/4) = 1$ y $f(3\pi/4) = -1$. ¿Cuál es el error fatal en su razonamiento?

5. ¿Puede aplicarse el TVI para garantizar que un cuentakilómetros digital que salta de a números enteros (1, 2, 3...) muestre en algún momento exactamente 2,5 kilómetros? Argumente.

6. Si el TVI nos asegura la existencia de al menos una raíz c, ¿qué herramientas matemáticas adicionales del cálculo necesitaríamos para probar que esa raíz es única?

7. Analice la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Evaluando $f(-1) = 2$ y $f(1) = 2$, el TVI no indica raíz real. Relacione esto con el discriminante cuadrático.

8. Si una función presenta un "hueco removible.^{en} el punto exacto $x = c$ donde la gráfica cruzaría el eje X, ¿el TVI seguiría siendo aplicable en el intervalo que lo contiene?

9. Redacte un ejemplo de la vida diaria donde el TVI pierda total validez debido a que la variable analizada es inherentemente discreta.

10. Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene obligatoriamente al menos una raíz real. Utilice el TVI y límites al infinito para justificar esta afirmación.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Demuestre que $f(x) = x^3 + x - 1$ tiene una raíz en $(0, 1)$.

Guía de Solución Interactiva

1. La función es un __________, por lo que es continua en todo su dominio.
2. Evaluamos el extremo inferior: $f(0) = (0)^3 + 0 - 1 =$ _____.
3. Evaluamos el extremo superior: $f(1) = (1)^3 + 1 - 1 =$ _____.
4. Como $f(0) \cdot f(1)$ es __________, por el TVI existe al menos una raíz.

Problema 2. Pruebe que la ecuación $\ln(x) + x = 2$ tiene solución en $[1, e]$.

PROFE TEO
Cuidado con las funciones trascendentes como los logaritmos. Recuerda que su dominio exige argumentos estrictamente positivos.

Guía de Solución Interactiva

1. Formamos la función $h(x) = \ln(x) + x -$ _____.
2. En $x = 1$: $h(1) = \ln(1) + 1 - 2 =$ _____ $+ 1 - 2 =$ _____ (Negativo).
3. En $x = e$: $h(e) = \ln(e) + e - 2 =$ _____ $+ e - 2$. Sabiendo que $e \approx 2{,}71$, este valor es __________.
4. Por el TVI, se garantiza la intersección.

Problema 3. Compruebe que $2^x = 3x$ posee intersección en $(0, 1)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Agrupamos para igualar a cero: $f(x) = 2^x -$ _____.
2. Evaluamos en cero: $f(0) = 2^0 - 0 =$ _____ (Signo: _______).
3. Evaluamos en uno: $f(1) = 2^1 - 3(1) =$ _____ (Signo: _______).
4. El cambio de signo avala la existencia por TVI.

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Demuestre que $x^4 - 3x^2 + x + 1 = 0$ tiene una raíz en $[-1, 0]$.

Problema 5. Demuestre que $x^5 - 2x^3 - 2 = 0$ tiene raíz en $[1, 2]$.

Problema 6. Pruebe que $\sin(x) = 1 - x$ cruza en $(0, \pi/2)$.

Problema 7. Garantice que $\sqrt{x-1} = 4 - x$ tiene solución en $[2, 4]$.

Problema 8. Demuestre que $x^3 = \cos(x)$ tiene al menos un punto de corte en $[0, 1]$.

Problema 9. Pruebe que $e^{-x} = x$ cruza en el intervalo $[0, 1]$.

Problema 10. Demuestre que $\ln(x^2 + 1) = 1$ tiene raíz en $(1, 2)$.

Problema 11. Pruebe que $f(x) = 2x - \arcsin(x)$ tiene una raíz distinta de cero en $[0{,}5, 1]$.

Problema 12. Confirme que $\arctan(x) = 1 - x^2$ tiene solución en $(0, 1)$.

Problema 13. Halle un intervalo de longitud 1 donde $3x^3 - 10x + 9 = 0$ tenga una raíz.

Problema 14. Demuestre que $\frac{x^2+1}{x-1} = 4$ tiene raíz en $[2, 4]$.

Problema 15. Pruebe que la ecuación $2\sin(x)+x^2-1 = 0$ tiene raíz en $(0, \pi/6)$.

Problema 16. Asegure que existe un número real c tal que $c^3+2c = 5$. Determine un intervalo válido.

Problema 17. Demuestre que $x \cdot 3^x = 1$ tiene solución en $(0, 1)$.

Problema 18. Pruebe que las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x+1}$ se cruzan en $(1, 2)$.

Problema 19. Demuestre que $\frac{1}{x} = x^3 - 2$ tiene una raíz en $(1, 2)$. ¿Por qué no usamos $[-1, 1]$?

Problema 20. Un vehículo parte del reposo y a los 10 segundos va a 30 m/s. Demuestre matemáticamente que su aceleración instantánea y velocidad coincidieron numéricamente. (Requiere combinar TVI con TVM, avanzado).

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un submarino nuclear desciende desde la superficie marítima inicial hasta una fosa abisal a mil metros. Compruebe mediante teoremas analíticos si el casco experimentó exactamente el nivel de menos quinientos metros.

Guía de Solución Interactiva

1. Posición inicial $P(0) =$ _____ m. Posición final $P(t_f) =$ _____ m. 2. La profundidad es una variable estrictamente __________. 3. Como -500 pertenece al intervalo, el TVI __________ su existencia real.

Problema 2. Un reactor neutraliza acidez pasando de pH tres a pH doce tras agregar hidróxido. Demuestre que el fluido bioquímico cruzó forzosamente el pH neutro exacto siete durante este proceso químico.

Guía de Solución Interactiva

1. El nivel pH en fluidos modela una función matemática __________. 2. Extremos del intervalo: $f(a) =$ _____ y $f(b) =$ _____. 3. Al ser el siete un valor intermedio, la neutralización está garantizada por el __________.

Problema 3. Un cable tensor en un puente colgante incrementa su tracción desde mil Newtons hasta soportar cuatro mil Newtons por viento. Garantice que el dinamómetro cruzó el registro exacto de tres mil.

Guía de Solución Interactiva

1. La tensión $T(v)$ se comporta sin saltos, es decir es __________. 2. Rango tensional: [_____ , _____]. 3. Dado que 3000 se encuentra acotado, el _____ confirma el suceso.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La carga térmica de un procesador de servidor oscila rígidamente desde treinta grados en reposo hasta noventa bajo renderizado. Asegure lógicamente si el termistor marcó cincuenta grados exactos.

Problema 5. Una válvula hidráulica industrial incrementa flujo de diez litros por minuto a setenta litros tras abrirse. Compruebe si la tubería soportó exactamente cuarenta litros transfiriendo fluido incompresible.

Problema 6. El índice de refracción óptica de una fibra de polímero varía de un índice uno al someterse a compresión hasta dos. Demuestre el paso obligado por la refracción áurea.

Problema 7. La fuerza de levitación magnética de un riel bala escala de cero Newtons apagado hasta diez mil operativos. Valide empíricamente la existencia de la fuerza de cinco mil.

Problema 8. El nivel energético de decaimiento isotópico radiactivo se reduce continuamente de mil becquerelios a cien. Certifique matemáticamente el umbral de media vida radiactiva exacto de quinientos becquerelios cruzados.

Problema 9. La velocidad orbital de una sonda astrofísica acelera desde tres kilómetros por segundo hasta escape terrestre de once. Fije el teorema para demostrar si registró ocho kilómetros precisos.

Problema 10. La resonancia acústica de un cristal fino se altera incrementando su frecuencia vibratoria de doscientos hercios hasta fractura a novecientos. Verifique su paso por la vibración media de quinientos hercios.

Problema 11. Una placa tectónica absorbe energía sísmica variando la amplitud de onda P de un milímetro a diez centímetros bruscamente. Justifique si la tierra vibró marcando tres centímetros milimétricos.

Problema 12. La recarga iónica de una celda de grafeno avanza de vacío en cero voltios hasta saturación a cinco. Demuestre el instante donde el polímetro detectó la tensión de tres voltios.

Problema 13. La función de pérdida de un algoritmo de inteligencia artificial decrece analíticamente de margen error cien a error base cinco. Compruebe el logro exacto de error cognitivo cincuenta computado.

Problema 14. La resistencia aerodinámica del fuselaje choca con ráfagas aumentando de arrastre nulo a coeficiente máximo cuatro. Valide el registro en túnel de viento para el índice de arrastre dos.

Problema 15. El nivel de humedad freática edáfica drena un campo desde saturación total del cien por ciento a aridez del diez. Avalúe si el medidor cruzó la marca óptima del cuarenta.

Problema 16. La ductilidad elástica de un cable polimérico desciende de factor diez bajo refrigeración extrema hasta cristalización de quiebre uno. Demuestre la ocurrencia del factor elástico de tolerancia seis.

Problema 17. La viscosidad dinámica de un magma silícico fluye subiendo desde cien pascales-segundo hasta solidificarse en mil. Justifique el cruce térmico por los quinientos pascales-segundo mediante cálculo analítico.

Problema 18. La dificultad de minería en bloque criptográfico se ajusta desde índice diez mil hasta desplomarse en mil. Certifique que el algoritmo resolvió hashes al umbral de cinco mil dificultad.

Problema 19. El torque inercial de una turbina eólica marina frena del nominal operativo cien kilojulios al reposo total cero. Demuestre el estado tensional de parada intermedia calibrada a cuarenta kilojulios.

Problema 20. El spin de una partícula cuántica medida macroscópicamente en campos varía gradualmente de proyección menos uno a más uno. Valide la polarización neutra perfecta cero en el laboratorio.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $f(0) = -1,\ f(1) = 1$. Demostrado.
2. $h(1) = -1,\ h(e) > 0$. Demostrado.
3. $f(0) = 1,\ f(1) = -1$. Demostrado.
4. $f(-1) = -2,\ f(0) = 1$. Demostrado.
5. $f(1) = -3,\ f(2) = 14$. Demostrado.
6. $h(0) = -1,\ h(\pi/2) = 1 - \pi/2 < 0$. Error (se debe usar $[\pi/4, \pi/2]$) ->$\sin(\pi/2) - 1 + \pi/2 > 0$.
7. $h(2) < 0,\ h(4) > 0$. Demostrado.
8. $h(0) = -1,\ h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Demostrado.
9. $h(0) = 1,\ h(1) = e^{-1} - 1 < 0$. Demostrado.
10. $h(1) = \ln 2 - 1 < 0,\ h(2) = \ln 5 - 1 > 0$.
11. $h(0{,}5) = 1 - \pi/6 > 0,\ h(1) = 2 - \pi/2 > 0$. Se reevalúa: $h(\sqrt{2}/2)$ o similar. (Sí tiene raíz).
12. $h(0) = -1,\ h(1) = \pi/4 > 0$. Demostrado.
13. Intervalo $[-3, -2]$. $f(-3) = -42, f(-2) = 5$.
14. $f(2) = 1,\ f(4) = 17/3 > 4$. (Pasa por 4).
15. $h(0) = -1,\ h(\pi/6) = 1 + (\pi/6)^2 - 1 > 0$.
16. $f(1) = -2, f(2) = 7$. Intervalo $[1, 2]$.
17. $h(0) = -1,\ h(1) = 2$. Demostrado.
18. $h(1) = 1-\sqrt{2} < 0, h(2) = 4-\sqrt{3} > 0$.
19. $h(1) < 0, h(2) > 0$. En $[-1, 1]$ hay asíntota (cero en denominador).
20. Por Teoría del Valor Medio para derivadas, existe instante.

Propuestos de Aplicación

1. Sí, profundidad 0 a -1000. Continua.
2. Sí, pH 3 a 12. Continua.
3. Sí, tensión 1000 a 4000. Continua.
4. Sí, $30 < 50 < 90$. Por TVI.
5. Sí, $10 < 40 < 70$. Por TVI.
6. Sí, $1 < 1{,}618 < 2$. Por TVI.
7. Sí, $0 < 5000 < 10000$. Por TVI.
8. Sí, $1000 \to 100$ pasa por 500.
9. Sí, velocidad continua cruza 8.
10. Sí, $200 < 500 < 900$. Por TVI.
11. Sí, 0,1cm $<$ 3cm $<$ 10cm. TVI.
12. Sí, carga es continua, $0 < 3 < 5$.
13. Sí, $100 \to 5$ cruza 50. Por TVI.
14. Sí, coeficiente pasa de 0 a 4.
15. Sí, $100\,\% \to 10\,\%$ cruza $40\,\%$.
16. Sí, elasticidad $10 \to 1$ pasa por 6.
17. Sí, viscosidad $100 \to 1000$ cruza 500.
18. Sí, $10000 \to 1000$ cruza 5000.
19. Sí, inercia $100 \to 0$ cruza 40.
20. Sí, spin $-1 \to 1$ cruza 0. Por TVI.

$\exists c$

¡La Certeza de la Existencia!

'A veces en la vida, como en el cálculo, no necesitas conocer todas las respuestas exactas ni el camino milimétrico. Solo necesitas la certeza matemática de que tu meta, en algún lugar de ese trayecto continuo, existe y te está esperando.'

- La garantía del Valor Intermedio

¡Misión cumplida! Has dominado uno de los teoremas más poderosos y abstractos del cálculo diferencial.

$f(c) = 0$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com