

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

**TEOREMA
DEL VALOR MEDIO**

CUADERNO DE TRABAJO

Rolle y TVM: Geometría y Demostraciones

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Vínculo entre lo Promedio y lo Instantáneo

El Teorema del Valor Medio (TVM) es, sin lugar a duda, el teorema más importante del cálculo diferencial. Conecta directamente la tasa de cambio promedio (geometría de la secante) con la tasa de cambio instantánea (geometría de la tangente).

1. El Teorema de Rolle

Sea f una función que cumple tres hipótesis:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b) .
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces, existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

....>

PROFE TEO

Las hipótesis son sagradas. La continuidad debe darse en el intervalo cerrado $[a, b]$, pero la derivabilidad basta que se cumpla en el abierto (a, b) . ¡Un solo punto no derivable destruye el teorema!

2. El Teorema del Valor Medio (TVM)

Sea f una función que cumple las siguientes hipótesis:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b) .

Entonces, existe al menos un número c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{o equivalentemente} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

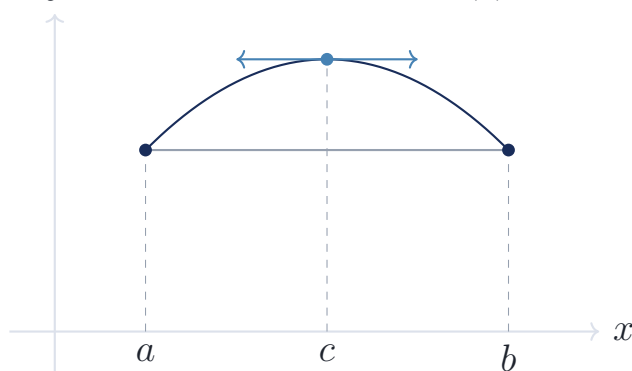
....>

PROFE TEO

El Teorema de Rolle te dice: *Si sales de casa y vuelves a casa, en algún momento de tu viaje tuviste que detenerte (velocidad cero) para dar la vuelta.*

Geoméricamente, el TVM afirma que existe algún punto interior c donde la recta tangente es paralela a la recta secante que une los extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

y Teorema de Rolle: $f'(c) = 0$



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Verificación de Rolle

Enunciado: Verifique las tres hipótesis del Teorema de Rolle para $f(x) = x^2 - 4x + 1$ en $[0, 4]$. Si se cumplen, halle todos los valores de c . **Solución:** 1) f es un polinomio, por tanto continua en $[0, 4]$. 2) f es derivable en $(0, 4)$ con $f'(x) = 2x - 4$. 3) $f(0) = 1$ y $f(4) = 16 - 16 + 1 = 1$. Se cumple $f(0) = f(4)$. Existe $c \in (0, 4)$ tal que $f'(c) = 0 \implies 2c - 4 = 0 \implies 2c = 4 \implies c = 2$. **Respuesta:** El teorema aplica y $c = 2$.

Problema Resuelto 2: Falla de Hipótesis

Enunciado: Explique por qué el Teorema de Rolle no aplica a $f(x) = 1 - x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 1]$. **Solución:** Verificamos las hipótesis: 1) Continua en $[-1, 1]$ (Sí, las raíces cúbicas admiten negativos). 2) $f(-1) = 1 - 1 = 0$, $f(1) = 1 - 1 = 0$. (Sí). 3) Derivabilidad: $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Esta derivada no existe en $x = 0$, el cual está dentro del intervalo $(-1, 1)$. **Respuesta:** No aplica porque f no es derivable en el abierto $(-1, 1)$.

....▷

PROFE TEO

Cuidado con las raíces de índice par y el valor absoluto. La función $f(x) = |x|$ es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1)$, pero Falla Rolle porque no es derivable en $x = 0$.

Problema Resuelto 3: Aplicación del TVM

Enunciado: Encuentre el valor c que satisface el TVM para $f(x) = x^3 - x$ en $[0, 2]$. **Solución:** f es polinomial (continua y derivable). Calculamos la pendiente de la secante: $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{(8-2)-0}{2} = \frac{6}{2} = 3$. El TVM afirma que $f'(c) = 3$. Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 1$. Igualamos: $3c^2 - 1 = 3 \implies 3c^2 = 4 \implies c^2 = 4/3 \implies c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. El intervalo es $(0, 2)$. El valor positivo es $2/\sqrt{3} \approx 1,15$, que sí pertenece. **Respuesta:** $c = 2/\sqrt{3}$.

Problema Resuelto 4: Desigualdades (Consecuencia del TVM)

Enunciado: Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leq 5$ para todo x . ¿Cuál es el valor máximo posible de $f(2)$? **Solución:** Por el TVM en $[0, 2]$: $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$. $f(2) - (-3) = 2f'(c)$. Como $f'(c) \leq 5$ para cualquier c : $f(2) + 3 \leq 2(5) \implies f(2) + 3 \leq 10 \implies f(2) \leq 7$. **Respuesta:** El valor máximo posible es 7.

Problema Resuelto 5: Demostración Analítica

Enunciado: Demuestre rigurosamente que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real. **Solución:** *Existencia:* Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe al menos una raíz en $(0, 1)$. *Unicidad:* Supongamos por contradicción que existen dos raíces $a \neq b$. Entonces $f(a) = f(b) = 0$. Por el Teorema de Rolle, debe existir c tal que $f'(c) = 0$. Sin embargo, $f'(x) = 3x^2 + 1$. Dado que $x^2 \geq 0$, tenemos $f'(x) \geq 1 > 0$ para todo x . La derivada nunca es cero. Contradicción.

Respuesta: La contradicción demuestra que no puede haber más de una raíz.

.... ▷

PROFE TEO

Mostrar identidades trigonométricas con el TVM es magia pura.

Si te piden demostrar $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$, aplicas TVM a $f(x) = \sin x$, y usas que $|\cos c| \leq 1$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Radares de Velocidad

Contexto: Un conductor ingresa a un tramo recto de peaje marcando tarjeta a las 14:00 hrs. A las 16:00 hrs marca la salida, habiendo recorrido 250 kilómetros. El límite de velocidad es 110 km/h. Verifique su infracción.

Solución: Velocidad promedio: $\frac{250-0}{2-0} = 125$ km/h. Por el TVM, la posición $s(t)$ (continua y derivable) asegura que hubo un instante c donde la velocidad instantánea $s'(c)$ igualó a 125 km/h. **Respuesta:** Infringió la ley al superar los 110 km/h.

Aplicación 2: Estabilización Térmica

Contexto: Un sensor termodinámico registra cincuenta grados a las dos en punto y cincuenta grados a las seis en punto en un reactor continuo. Demuestre que el flujo calórico se congeló temporalmente.

Solución: $T(t)$ es la temperatura. $T(2) = 50$, $T(6) = 50$. Se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle. Debe existir un tiempo $c \in (2, 6)$ donde $T'(c) = 0$.

Respuesta: Hubo un momento exacto donde la temperatura dejó de cambiar.

Aplicación 3: Consumo de Baterías

Contexto: Un dron topográfico despegó con el cien por ciento de batería y aterriza totalmente descargado en un lapso de cinco horas continuas. Determine el ritmo de descarga exacto comprobado matemáticamente.

Solución: $B(t)$ es el nivel. $B(0) = 100$, $B(5) = 0$. Variación media: $\frac{0-100}{5-0} = -20$. Por el TVM, existe $c \in (0, 5)$ donde $B'(c) = -20$. **Respuesta:** Hubo un instante descargando exactamente a -20% /hora.

Aplicación 4: Dinámica Hídrica

Contexto: Una represa evacua agua operando compuertas cíclicas. Inicia el lunes con un millón de metros cúbicos y termina el viernes con un millón métrico absoluto. Compruebe la inercia del fluido.

Solución: Volumen $V(t)$. $V(1) = 1,000,000$ y $V(5) = 1,000,000$. Teorema de Rolle aplicable si V es diferenciable. Existe c tal que $V'(c) = 0$. **Respuesta:** El caudal de evacuación fue nulo en algún momento de la semana.

Aplicación 5: Rendimiento Bursátil

Contexto: La cotización logarítmica de una cartera rinde quinientos dólares mensuales el día uno y asciende a mil dólares el día once cerrados continuos. Cuantifique el salto marginal corporativo demostrado teóricamente.

Solución: $R(t)$ rendimiento. $R(1) = 500$, $R(11) = 1000$. Tasa promedio: $\frac{1000-500}{11-1} = \frac{500}{10} = 50$. Por el TVM, $R'(c) = 50$ en algún día $c \in (1, 11)$.

Respuesta: La ganancia alcanzó exactamente cincuenta dólares por día.

....▷

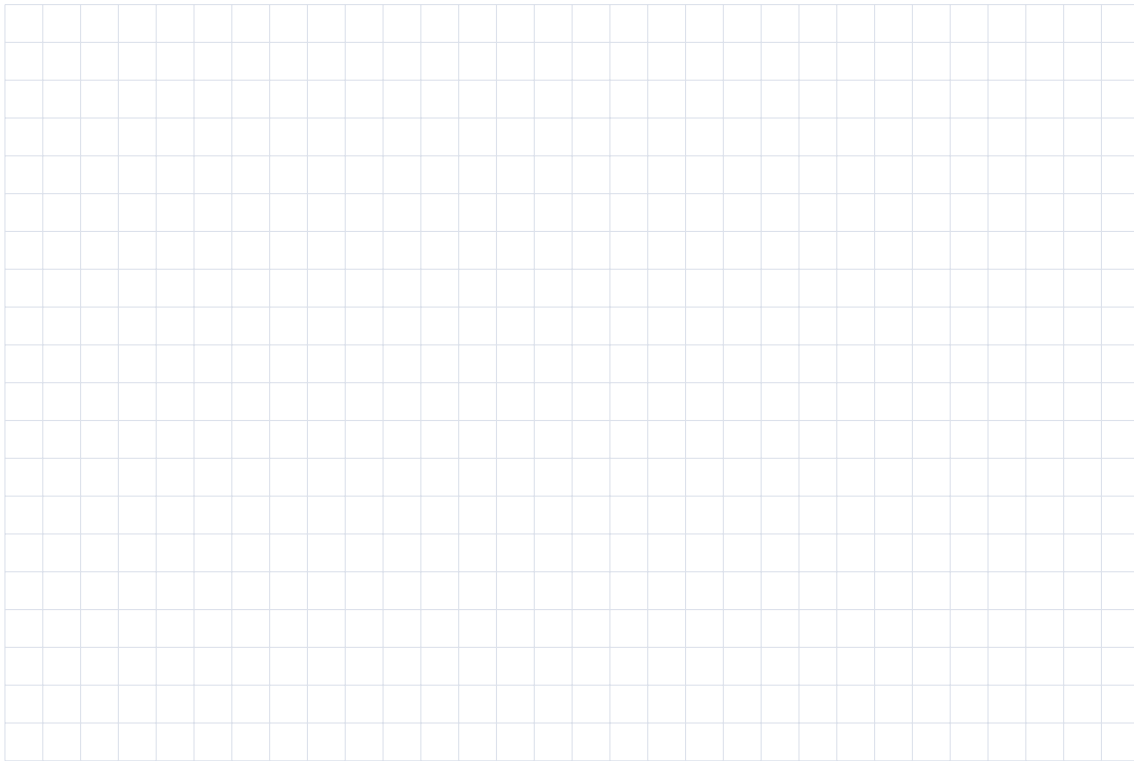
PROFE TEO

El TVM conecta magnitudes físicas integrales (distancia total) con derivadas (velocidad instantánea). ¡Es la base de casi toda la física de cinemática!

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice la necesidad de las hipótesis. ¿Por qué la exigencia de derivabilidad del TVM se flexibiliza para requerir solo un intervalo abierto (a, b) , mientras que la continuidad sí exige el cerrado $[a, b]$?
2. El Teorema de Rolle exige que $f(a) = f(b)$. Explique geoméricamente por qué esta condición forzosamente "dobla" la curva, obligando a la existencia de una tangente horizontal.
3. Argumente mediante un contraejemplo riguroso por qué la función constante $f(x) = k$ no viola el Teorema de Rolle, a pesar de poseer infinitos valores c donde $f'(c) = 0$.
4. Evalúe el Teorema del Valor Medio como una generalización analítica. Demuestre que el Teorema de Rolle no es más que un caso especial del TVM.
5. Considere una función racional con una asíntota vertical en $x = c \in (a, b)$. Describa cómo esta singularidad destruye completamente las conclusiones lógicas del Teorema del Valor Medio.
6. El TVM garantiza la existencia de al menos un valor c . Construya y grafique una función senoidal simple en un intervalo específico donde existan exactamente tres valores de c .
7. Analice críticamente: ¿Ofrece el Teorema del Valor Medio algún método algorítmico o constructivo para encontrar el valor de c , o es puramente un teorema de existencia? Argumente.
8. Traduzca al lenguaje cinemático la diferencia entre la pendiente de la recta secante y la pendiente de la recta tangente, utilizando un ejemplo de movimiento balístico.
9. Utilice el Teorema del Valor Medio para demostrar lógicamente que si $f'(x) = 0$ para todos los números x en un intervalo (a, b) , entonces la función f debe ser estrictamente constante.
10. Compare el Teorema de Rolle con el Teorema del Valor Extremo (Weierstrass). Aunque ambos operan en $[a, b]$, explique cómo difieren fundamentalmente sus conclusiones sobre el comportamiento de la derivada.



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $c = 2,5$.
2. $3c^2 = 4 \implies c = 2/\sqrt{3}$.
3. $c = 2,25$ (o $9/4$).
4. $c = 0, c = 1, c = -1$.
5. $-1/c^2 = -1/3 \implies c = \sqrt{3}$.
6. Derivada no existe en $x = 2$ (pico).
Falla Rolle.
7. $\cos c = 0 \implies c = \pi/2$.
8. $c = \pi/2$.
9. $1/c = 1/(e - 1) \implies c = e - 1$.
10. $f'(x) = 5x^4 + 10 > 0$. Por Rolle,
raíz única.
11. $e^c = (2 - 1)/\ln 2 \implies c = \ln(1/\ln 2)$.
12. $c = -4$.
13. $f(4) - 10 \geq 2(3) \implies f(4) \geq 16$.
14. $2/(c+2)^2 = 1/9 \implies c = 3\sqrt{2} - 2$.
15. Asíntota en $\pi/2$. Discontinua. Falla Rolle.
16. $\frac{1}{1+c^2} = \frac{\pi}{4} \implies c = \sqrt{4/\pi - 1}$.
17. Aplicar TVM a $\cos x$. $|\sin c| \leq 1$.
18. $c = \pm\sqrt{7/3}$.
19. $f(x) - f(a) = c(x - a) \implies f(x) = cx + d$.
20. $c = 3\pi/4, c = 7\pi/4$.

Propuestos de Aplicación

1. Velocidad 0 en algún momento (Rolle).
2. 10000 bytes/s TVM.
3. 10 g/h de conversión obligatoria.
4. 1000 ha/año de recuperación TVM.
5. $v = 0$ en el espacio (Rolle).
6. Tangente horizontal cenital $v_y = 0$.
7. Tasa de 12,25 bits/h procesada.
8. Cien grados por hora cruzados.
9. Resistencia freno $A'(c) = 0$ Rolle.
10. 7,5 cm/eón ruptura instantánea TVM.
11. $v = 0$ y $a = 0$ relativos por Rolle.
12. 300 cél/día expansión obligatoria.
13. Rentabilidad cruzó el 0% Rolle.
14. 10/3 m/h fuerza sostenida TVM.
15. Corriente $I' = 0$ en un valle/cresta.
16. 200 rev/min ganancia marginal.
17. 1000 litros/s marginal cruzado TVM.
18. Fase nula $E' = 0$ fotónica Rolle.
19. 20 ml/s de inyección TVM.
20. 50 brazas/h caída TVM obligatoria.

¡El Valor de lo Medio!

'No importa qué tan errática o turbulenta parezca tu trayectoria en el día a día. El Teorema del Valor Medio nos enseña que, en algún instante preciso, tu esfuerzo instantáneo fue perfectamente igual al progreso de tu meta general. Todo cuenta, cada derivada de tu esfuerzo construye la recta de tu éxito.'

- La regla de la equivalencia analítica

¡Enhorabuena! Has descifrado el corazón geométrico del Cálculo Diferencial.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

TVM