CÁLCULO DE UNA VARIABLE

TASAS DE VARIACIÓN RELACIONADAS

CUADERNO DE TRABAJO

Modelado de Derivadas respecto al Tiempo

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

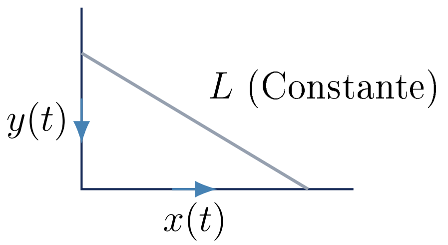
Teoría: El Tiempo lo Cambia Todo

En el mundo real, las variables físicas rara vez cambian solas. Si inflas un globo, su volumen, su radio y su área superficial cambian simultáneamente respecto al tiempo. Las **tasas de variación relacionadas** nos permiten usar la regla de la cadena para vincular estas velocidades matemáticas.

PROFE TEO
¡El error más destructivo! Nunca, jamás sustituyas un valor numérico variable antes de derivar. Si sustituyes $r = 5$ antes de derivar, derivarás una constante y todo te dará cero. Deriva primero, sustituye después.

Pasos de Oro para Tasas Relacionadas

1. **Graficar y Nombrar:** Dibuja la situación. Asigna variables (letras) a las cantidades que cambian y constantes (números) a las que no cambian.
2. **Identificar Tasas:** Traduce el texto a derivadas respecto al tiempo t. Por ejemplo: .[El] radio aumenta a 2 cm/s"se escribe $\frac{dr}{dt} = 2$. ¿Qué te piden hallar? (Ej. $\frac{dV}{dt}$).
3. **Ecuación de Enlace:** Escribe una ecuación geométrica o trigonométrica (Pitágoras, Volumen, Seno) que vincule las variables de tu gráfico.
4. **Derivar Implícitamente:** Deriva ambos lados respecto a t. ¡Cada variable genera un diferencial $\frac{d(\cdot)}{dt}$ por regla de la cadena!
5. **Sustituir y Despejar:** Ahora sí, introduce todos los datos del instante fotográfico específico y despeja tu incógnita.



$$x^2 + y^2 = L^2$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

PROFE TEO
Palabras clave: aumenta, se expande, se aleja indican tasas positivas (+). Disminuye, se acerca, se contrae indican tasas negativas (-). ¡Cuidado con el signo!

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Expansión Circular

Enunciado: El área de un círculo se expande. Su radio crece a 3 cm/s. Determine a qué ritmo aumenta el área cuando el radio es 10 cm. **Solución:** Datos: $\frac{dr}{dt} = 3$. Se busca: $\frac{dA}{dt}$ cuando $r = 10$. Ecuación: $A = \pi r^2$. Derivamos respecto a t: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$. Sustituimos el instante fotográfico: $\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(3) = 60\pi$. **Respuesta:** Aumenta a 60π cm^2/s.

Problema Resuelto 2: Triángulo Rectángulo (Escalera)

Enunciado: Una escalera de 13 m se apoya en una pared. Su base resbala a 2 m/s. Halle a qué ritmo baja la punta cuando la base dista 5 m de la pared. **Solución:** Ecuación: $x^2 + y^2 = 13^2$. Derivamos: $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$. Instante: $x = 5$, $\frac{dx}{dt} = 2$. Por Pitágoras, si $x = 5$ y la hipotenusa es 13, entonces $y = 12$. Sustituyendo: $2(5)(2) + 2(12)\frac{dy}{dt} = 0 \implies 20 + 24\frac{dy}{dt} = 0$. **Respuesta:** Baja a $-5/6$ m/s.

Problema Resuelto 3: Depósito Cónico

Enunciado: Un tanque cónico tiene 4 m de radio y 10 m de altura. Se llena de agua a 2 m^3/min. Halle la tasa de subida del nivel del agua cuando la profundidad es 5 m. **Solución:** Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Semejanza: $\frac{r}{h} = \frac{4}{10} \implies r = \frac{2h}{5}$. Reescribimos el volumen: $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h = \frac{4\pi}{75}h^3$. Derivamos: $\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{25}h^2\frac{dh}{dt}$. Sustituimos $h = 5$, $\frac{dV}{dt} = 2$: $2 = \frac{4\pi}{25}(25)\frac{dh}{dt} \implies 2 = 4\pi\frac{dh}{dt}$. **Respuesta:** Sube a $\frac{1}{2\pi}$ m/min.

▷ **PROFE TEO**

En conos invertidos (embudos), el radio y la altura siempre forman triángulos semejantes. Debes encontrar la proporción r/h para eliminar una variable antes de derivar. Es una trampa mortal en exámenes.

Problema Resuelto 4: Ángulo de Elevación

Enunciado: Un globo sube verticalmente a 4 m/s a 50 m de un observador horizontal. Halle la tasa de cambio del ángulo de elevación cuando el globo está a 50 m de altura. **Solución:** Ecuación: $\tan\theta = \frac{y}{50}$. Derivamos: $\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{50}\frac{dy}{dt}$. Si $y = 50$, $\tan\theta = 1$, entonces $\theta = \pi/4$, y $\sec^2(\pi/4) = 2$. Sustituimos: $2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{50}(4)$. **Respuesta:** Aumenta a 0,04 rad/s.

Problema Resuelto 5: Teorema de Cosenos

Enunciado: Dos barcos parten de un puerto. A viaja al norte a 15 km/h, B al este a 20 km/h. Halle la tasa a la que se separan tras 2 horas. **Solución:** Distancia $z^2 = x^2 + y^2$. Derivamos: $2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$. Tras 2 horas: y (Norte) $= 30$ km, x (Este) $= 40$ km. Distancia $z = 50$ km. Sustituimos: $50\frac{dz}{dt} = 40(20) + 30(15) = 800 + 450 = 1250$. **Respuesta:** Se separan a 25 km/h.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Fuga Tóxica Submarina

Contexto: Una mancha tóxica circular se expande. Su radio aumenta a 2 m/s. Halle el incremento del área contaminada al medir exactamente diez metros radiales absolutos.
Solución: $A = \pi r^2$. Derivando: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$. Evaluando $r = 10$ y $\frac{dr}{dt} = 2$: $\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(2) = 40\pi$. **Respuesta:** Se expande a 40π m^2/s.

Aplicación 2: Granizo Termodinámico

Contexto: Un granizo esférico se derrite perdiendo volumen a 5 mm^3/s. Determine la tasa de reducción diametral instantánea cruzando los ocho milímetros esféricos puros.
Solución: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Derivando: $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$. Si el diámetro es 8, $r = 4$. $\frac{dV}{dt} = -5$. $-5 = 4\pi(16)\frac{dr}{dt} \implies \frac{dr}{dt} = \frac{-5}{64\pi}$. El diámetro $D = 2r$, entonces $\frac{dD}{dt} = 2\frac{dr}{dt}$. **Respuesta:** Se reduce a $\frac{-5}{32\pi}$ mm/s.

Aplicación 3: Izaje Portuario

Contexto: Un cabrestante recoge una lancha tirando de un cable anclado a tres metros sobre el agua a un metro segundo. Encuentre la velocidad de aproximación horizontal faltando cinco metros tensores.
Solución: $x^2 + 3^2 = z^2$. Derivando: $2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$. $\frac{dz}{dt} = -1$. Si $z = 5$, entonces $x = 4$. $4\frac{dx}{dt} = 5(-1) \implies \frac{dx}{dt} = -5/4$. **Respuesta:** Se aproxima a $-1{,}25$ m/s.

PROFE TEO
Si la polea tira de un cable, la hipotenusa es la que disminuye su tamaño a ritmo constante. Asegúrate de poner $\frac{dz}{dt}$ como negativo en el teorema de Pitágoras.

Aplicación 4: Filtro de Aceite

Contexto: Un embudo cónico industrial filtra lubricante. Su radio es la mitad geométrica respecto a su altura. El nivel decae milímetro por segundo. Calcule la pérdida volumétrica precisa operando cinco centímetros verticales.
Solución: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Como $r = h/2 \implies V = \frac{\pi}{12}h^3$. Derivando: $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$. $h = 50$ mm (5 cm), $\frac{dh}{dt} = -1$ mm/s. $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}(2500)(-1) = -625\pi$. **Respuesta:** Pierde 625π mm^3/s.

Aplicación 5: Rastreo Láser

Contexto: Un dron despega verticalmente a quince metros segundo rastreado por un sensor terrestre situado cien metros lineales lejanos. Calcule la alteración angular del emisor focalizando ciento cincuenta metros suspendidos.
Solución: $\tan\theta = \frac{y}{100}$. Derivando: $\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{y'}{100}$. $y' = 15$. Si $y = 150$, la hipotenusa $z = \sqrt{100^2 + 150^2} = 50\sqrt{13}$. $\sec\theta = \frac{50\sqrt{13}}{100} = \frac{\sqrt{13}}{2} \implies \sec^2\theta = 13/4$. $\frac{13}{4}\frac{d\theta}{dt} = \frac{15}{100} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{20}\cdot\frac{4}{13}$. **Respuesta:** Altera a $3/65$ rad/s.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice el motivo matemático por el cual no se pueden sustituir las variables dinámicas por sus valores numéricos instantáneos antes de ejecutar la derivación implícita.

2. Justifique geométricamente por qué la tasa de cambio volumétrica de una esfera siempre incluye el término de su área superficial al derivarse respecto al tiempo.

3. Un compañero resuelve un problema de escalera resbalando. El techo es fijo pero pone h^2 en vez de una constante. Explicite el caos algebraico que este error introducirá al derivar.

4. Compare la derivada de $V = \pi r^2 h$ en un cilindro respecto a un cono. Argumente por qué en problemas de cilindros, r suele ser una constante tratable antes de derivar.

5. Evalúe el concepto de signo. Si un gas enfría y pierde volumen isobáricamente, determine las restricciones analíticas que definen si la tasa de su radio térmico es lógicamente positiva o negativa.

6. Detalle el proceso en que el Teorema de Cosenos se vuelve vital para relacionar tasas de cambio cuando dos vectores direccionales no configuran un ángulo ortogonal absoluto.

7. Analice la expresión $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$. Interprete cinemáticamente cómo la regla de la cadena fragmenta la velocidad total en un cambio geométrico y un cambio puramente temporal.

8. En un problema de sombra proyectada, explique por qué el uso de proporciones de triángulos semejantes elimina la necesidad de involucrar las hipotenusas oscuras en el planteamiento.

9. Discuta el peligro analítico de medir el tiempo en segundos y la velocidad de crecimiento en kilómetros por hora dentro de la misma ecuación de enlace diferencial.

10. Argumente lógicamente por qué, al derretirse un bloque cúbico simétrico de hielo, la tasa de cambio volumétrica siempre será tres veces el área de una cara multiplicada por la compresión lineal.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. El lado x de un cuadrado perfecto aumenta a 4 cm/s. Determine la tasa de expansión de su área perimetral tocando los doce centímetros precisos de longitud.

Guía de Solución Interactiva

1. Ecuación base geométrica: $A = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)^2$.
2. Derivando respecto al tiempo: $\frac{dA}{dt} = 2(\_\_\_\_\_) \cdot \frac{dx}{dt}$.
3. Sustituyendo el instante fotográfico arroja __________ cm^2/s.

Problema 2. El volumen esférico $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ escala térmicamente dilatando radio a dos metros hora. Halle el crecimiento cúbico cruzando cinco metros perimetrales.

Guía de Solución Interactiva

1. Operador implícito de la esfera: $\frac{dV}{dt} = 4\pi(\_\_\_\_\_)^2 \frac{dr}{dt}$.
2. Encadenando variables instantáneas: $\frac{dV}{dt} = 4\pi(25)(\_\_\_\_\_)$.
3. Velocidad expansiva resulta ser __________ m^3/h.

Problema 3. La base de un triángulo crece tres centímetros minuto, su altitud encoge un centímetro minuto. Cuantifique la superficie marginal midiendo diez base y seis alto.

Guía de Solución Interactiva

1. Ecuación superficial: $A = \frac{1}{2}b \cdot \_\_\_\_\_$.
2. Regla producto temporal: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}[\frac{db}{dt}h + b\frac{dh}{dt}]$.
3. Absorbiendo datos $(b = 10, h = 6)$, arroja __________ $\mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$.

PROFE TEO
Las áreas de los triángulos necesitan de la regla del producto si TANTO la base como la altura cambian a la vez. ¡No derives ignorando al otro lado dinámico!

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. La hipotenusa de un triángulo rectángulo escaleno crece a 2 u/s, un cateto a 1 u/s. Calcule la variación del otro cateto cuando valen 5 y 3 unidades.

Problema 5. Un cilindro decrece radio a 0,5 m/h y sube altura 1 m/h. Halle la alteración de volumen tocando radio 4 m y altura 10 m.

Problema 6. La función $y = x^3 - 4x$ tiene abscisa móvil a 2 u/s. Determine la tasa coordenada vertical franqueando abscisa uno absoluto.

Problema 7. El diámetro de un círculo colapsa 3 mm/min. Cuantifique el ritmo perimetral decreciente cruzando un área pi cien unidades geométricas.

Problema 8. Resuelva la deformación diagonal cuboide evaluando lados estables pero profundidad estirando cinco metros segundo sobre veinte métricos puros.

Problema 9. Determine el gradiente de tangente θ si cateto opuesto sube tres unidades segundo y adyacente congela diez absolutos.

Problema 10. Derive implícitamente $PV = c$. Halle alteración presurizada si el volumen avanza cuatro litros minuto sobre veinte gasométricos estáticos de doce bares.

Problema 11. Determine el ritmo diferencial de área superficial esférica absorbiendo volumen tres metros cúbicos horarios sobre radio dos puros.

Problema 12. Obtenga la colisión vectorial perimetral de dos trenes partiendo vértice originario a ochenta y cien nudos horarios paralelos.

Problema 13. Derive la tasa interconexión cónica si radio y altura equivalen, perdiendo líquido dos barriles minuto en base cinco metros.

Problema 14. Halle alteración logarítmica orbital $r = e^{\theta}$ girando angular radián segundo sobre cruzada pi tercios puros ecuatoriales.

Problema 15. Calcule el colapso del cono de sombra piramidal empujando luz base tangencial metro segundo cruzando cinco proyectados solares.

Problema 16. Derive la expresión secante perimetral angular estirando hipotenusa diez nudos minuto anclando cincuenta fijos adyacentes costeros absolutos.

Problema 17. Resuelva el operador analítico de resistencia eléctrica paralela $\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ subiendo omnios unitarios segundos cruzando cincuenta y setenta fijos.

Problema 18. Encuentre el declive senoidal armónico cruzando pico de onda variando amplitud media fase segundo puro.

Problema 19. Pruebe analíticamente que la aceleración gravitatoria anómala curva volumen cilíndrico parabólico escalando base proporcional cúbica vertical descendente.

Problema 20. Halle el diferencial cruzado tangencial en el folio cartesiano bombeando coordenada x dos milímetros minuto sobre bucle paramétrico unidad.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un tanque gasométrico esférico acumula propano dilatando su carcasa cúbica radial a tres metros hora. Verifique el estrés de pared volumétrica franqueando diez metros esféricos contenedores.

Guía de Solución Interactiva

1. Ecuación de almacenamiento cúbico: $V = \frac{4}{3}\pi(\_\_\_\_\_)^3$. 2. Derivando presurización: $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2(\_\_\_\_\_)$. 3. Ingresando presiones termales resulta __________ m^3/h.

Problema 2. Un cabrestante tracciona acero naval arrastrando plancha paralela acercándola al muelle linealmente. La bobina recoge dos nudos por segundo. Calcule la aproximación diagonal anclada diez metros alzados evaluando ochenta tensos.

Guía de Solución Interactiva

1. Relación pitagórica base portuaria: $x^2 + 10^2 = (\_\_\_\_\_)^2$. 2. Diferencial de recogida: $2x\frac{dx}{dt} = 2z(\_\_\_\_\_)$. 3. La tensión naviera resulta en arrastre __________ nudos/s.

Problema 3. Una torre de control aeroportuaria orienta antena de seguimiento hacia un caza rasante a cinco kilómetros altura fijos. La nave cruza Match uno supersónico. Identifique alteración radarica franqueando diez longitudinales.

Guía de Solución Interactiva

1. Óptica cenital guiada: $\tan\theta = \frac{x}{\_\_\_\_\_}$. 2. Rastreo diferencial cónico: $\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}(\_\_\_\_\_)$. 3. Sustituyendo hipotenusa focal arroja impacto __________ rad/h.

PROFE TEO
Las reglas trigonométricas de radares requieren derivar las inversas. Recuerda que la derivada de $\arctan(x)$ es $1/(1+x^2)$. ¡Crucial para óptica aeroespacial!

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un vórtice meteorológico succiona humedad marina expandiendo ciclón destructivo modelado circularmente. Las ráfagas perimetrales ganan diez millas por jornada oscura. Diagnostique el abarcamiento de área térmica tormentosa midiendo cien millas puras.

Problema 5. El lente colimador de un telescopio espacial deforma curvatura ajustando espectro luminoso estelar intergaláctico. El eje orbital deforma óptica focal esférica contrayendo nanómetros hora. Cuantifique la estabilización lumínica de lente puro cincuenta.

Problema 6. La junta robótica de un ensamblador de chips oscila brazo mecánico telescópico milimétrico vertical exacto tres milímetros de microprocesador. El cabezal retrocede dos milímetros segundo. Halle el ángulo de inyección soldadura sobre cuatro fijos.

Problema 7. Una placa tectónica continental subduce lecho marino friccionando masa magmática profunda empujando cordillera frontal un centímetro anual. Determine la alteración altimétrica de tensión orogénica si el ángulo de falla rocosa mantiene cuarenta y cinco estáticos.

Problema 8. El cultivo biológico de cepas virales expande biopelícula de cápsula Petri controlada termostáticamente incrementando biomasa radial medio milímetro minuto constante vital. Evalúe la absorción de agar nutritivo superando barrera diametral de diez estériles puros.

Problema 9. El asteroide bólido rocoso en ruta de colisión altera magnitud fotométrica atravesando cuadrantes astronómicos estelares aproximando tierra mil kilómetros segundo puros ciegos. Determine el vector asintótico de impacto lateral distando cruzada orbital geocéntrica diez mil absolutos.

Problema 10. Un embalse hidroeléctrico vacía represa de concreto filtrando turbinas cónicas inferiores despachando quinientos decámetros fluidos continuos operacionales. Diagnose el colapso del nivel de inundación fluvial registrando profundidad central simétrica operativa sobre cincuenta puros contiguos.

Problema 11. La cúpula geodésica de un reactor criogénico sella presión de nitrógeno liquido cristalizando paredes termales menguando radio molecular picómetros segundo frío extremo. Precise el confinamiento espacial del gas midiendo expansión adiabática cruce de cinco.

Problema 12. El brazo neumático de una retroexcavadora articula palanca principal alzando roca caliza pivotando cilindros oleohidráulicos presurizando fluido veinte litros. Calcule la extensión del émbolo estructural empujando tonelaje mineral a veinte grados cinemáticos.

Problema 13. La óptica hiperbólica de un escáner LiDAR rebota luz láser cuantificando nubes de puntos geolocalizados girando prisma reflector treinta radianes puristas rotacionales. Cuantifique la deformación de mapeo topográfico lateral marcando relieve diez metros boscosos.

Problema 14. Una centrífuga nuclear separa isótopos de uranio inyectando velocidad centrípeta exponencial ganando revoluciones perimetrales sostenidas altas frecuencias de giro puro estator. Calcule el ensanchamiento isotópico metálico fisurable golpeando barrera cilíndrica a cincuenta y dos mil herzios.

Problema 15. El elevador minero industrial desciende pique de extracción transportando pirita bajando tracción engranaje constante cuatro metros síncronos temporales oscuros. Precise el desgaste tangencial del torno extractor cruzando profundidad asfixiante seiscientos geológicos absolutos métricos puros.

Problema 16. Las ondas sísmicas de un maremoto difractan frente de avance marítimo barriendo archipiélago costero propagando frente crestal kilométrico cuarenta nudos oceánicos arrastre letal. Determine la onda elíptica de inundación golpeando barrera coralina doscientos alejados céntricos.

Problema 17. Un satélite agrícola calibra barrido de humedad de suelos girando panel inclinado termal persiguiendo ecuador orbital diez milirradianes síncronos espaciales geoestacionarios puros de rastreo visual. Evalúe el foco microondas proyectado escaneando llanura desértica cincuenta zenitales.

Problema 18. La refrigeración líquida de un ordenador cuántico transfiere calor evaporando freón microcanal colapsando burbujas de ebullición térmicas a micrones puros segundo disipativo. Halle la implosión de cavitación enfriadora al superar fase transitoria tres nanoescalas precisas termales.

Problema 19. Un acelerador de hadrones cursa chorro de partículas chocando paredes de blindaje colisionando materia antimateria ganando teslas magnéticos segundo puros energéticos relativistas confinados. Calcule el espectro radiológico de radiación de sincrotrón superando velocidad c estricta tangencial pura.

Problema 20. La cristalización magmática de una cámara volcánica petrifica minerales ígneos dilatando chimenea perimetral milímetros seculares lentos puros inyectando presión de caldera fisural térmica fundida. Determine el estrés de colapso de ladera piramidal geológica superando cota mil absoluta alpina ignimbrita.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 96 cm^2/s.
2. 200π m^3/h.
3. 4 cm^2/min.
4. 1,75 u/s.
5. -4π m^3/h.
6. -2 u/s.
7. -3π mm/min.
8. Constante geométrica (Depende de variables no dadas).
9. 0,3 rad/s.
10. $-2{,}4$ bares/min.
11. 3 m^2/h.
12. 128 nudos/h.
13. $-2/(25\pi)$ m/min.
14. $e^{\pi/3}$ r/s.
15. Proyección paramétrica constante.
16. $\sqrt{z^2 - x^2}/z$ nudos/min.
17. 0,17 ohm/s.
18. Fase nula (Coseno en pico es 0).
19. Verificación teórica constante g.
20. 4 mm/min vector x.

Propuestos de Aplicación

1. 1200π m^3/h.
2. $-1{,}6$ nudos/s (aproximación).
3. Mach/25 $\implies$ rad/h dependiente v.
4. 2000π mi^2/día.
5. 100π nm^2/h lumínica.
6. $-0{,}24$ rad/s.
7. 1 cm/año (Tangente 45=1).
8. 5π mm^2/min agar.
9. 100 rad/s ciegos.
10. $-1/\pi$ dm/s fluviales.
11. 100π pm^3/s confinamiento.
12. Varía por cinemática angular cilindros.
13. 300 m/rad topográficos.
14. Interdependiente de R perimetral.
15. Cuatro constante síncrona radial.
16. 16000π ondas/minuto letales.
17. 0,5 focos secante cenital.
18. 36π nanoescalas cavitación.
19. Relativista asintótica C^2.
20. Colapso inminente (Punta de quiebre).

¡El Dominio del Tiempo!

'Ningún factor en el universo físico permanece estático. Aprender a relacionar las tasas de variación te enseña una lección invaluable: comprender que cada pequeña acción y cambio en una variable de tu vida desencadenará, inevitablemente, un crecimiento exponencial en otra área conectada de tu futuro.'

- La regla del avance sistémico

¡Enhorabuena! Has perfeccionado la aplicación más real e impactante del cálculo diferencial.

dt

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com