PRECÁLCULO

TASAS DE CAMBIO

CUADERNO DE TRABAJO

Tasa Promedio y el Cociente Diferencial

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Puente hacia el Cálculo

Comprender cómo cambian las cantidades es el corazón de las matemáticas aplicadas. Antes de derivar, necesitamos dominar algebraicamente la variación a través de las tasas de cambio.

1. Tasa de Cambio Promedio (TCP)

La tasa de cambio promedio de una función $f(x)$ sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ mide cuánto cambia y por cada unidad que cambia x. Geométricamente, representa la **pendiente de la recta secante** que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$$\text{TCP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

PROFE TEO

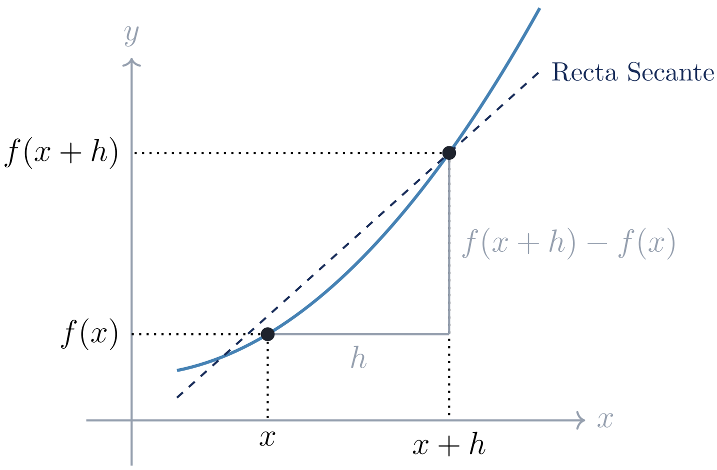
¡Cuidado con los signos! Al restar $f(a)$ asegúrate de usar paréntesis. El error más común aquí es no distribuir el signo negativo.

2. El Cociente Diferencial

Es una forma generalizada de la tasa de cambio promedio. En lugar de usar un intervalo numérico $[a, b]$, usamos un punto de partida x y un incremento h. El intervalo es $[x, x + h]$.

$$\text{Cociente Diferencial} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

Este cociente es la antesala directa a la derivada en cálculo diferencial.



PROFE TEO

El cociente diferencial no es un "monstruo". Es simplemente la fórmula de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ disfrazada. ¡La base es h y la altura es la diferencia de las funciones!

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: TCP de una Función Lineal

Enunciado: Halle la TCP de $f(x) = 4x - 7$ en el intervalo $[2, 5]$.
Solución: Evaluamos: $f(2) = 4(2) - 7 = 1$ y $f(5) = 4(5) - 7 = 13$.
$\text{TCP} = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{13-1}{3} = \frac{12}{3} = 4$.
Nota: En una recta, la TCP siempre es igual a su pendiente.

Problema Resuelto 2: TCP de una Cuadrática

Enunciado: Determine la TCP de $g(x) = x^2 - 3x$ en $[-1, 3]$.
Solución: Evaluamos los extremos: $g(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$.
$g(3) = (3)^2 - 3(3) = 9 - 9 = 0$.
$\text{TCP} = \frac{g(3)-g(-1)}{3-(-1)} = \frac{0-4}{3+1} = \frac{-4}{4} = -1$.

PROFE TEO
Si al calcular el cociente diferencial para un polinomio la 'h' del denominador no se cancela al final, ¡detente! Has cometido un error en tu expansión algebraica.

Problema Resuelto 3: Cociente Diferencial Básico

Enunciado: Halle el cociente diferencial para $f(x) = 3x^2$.
Solución: Paso 1: $f(x+h) = 3(x+h)^2 = 3(x^2+2xh+h^2) = 3x^2+6xh+3h^2$.
Paso 2: $f(x + h) - f(x) = (3x^2 + 6xh + 3h^2) - 3x^2 = 6xh + 3h^2$.
Paso 3: Dividir entre h: $\frac{6xh+3h^2}{h} = \frac{h(6x+3h)}{h} = 6x + 3h$.

Problema Resuelto 4: Cociente Diferencial Avanzado (Fracción)

Enunciado: Simplifique el cociente diferencial para $f(x) = \frac{2}{x}$.
Solución: $f(x + h) - f(x) = \frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}$. Usando mínimo común múltiplo:
$= \frac{2x-2(x+h)}{x(x+h)} = \frac{2x-2x-2h}{x(x+h)} = \frac{-2h}{x(x+h)}$.
Dividiendo entre h: $\frac{\frac{-2h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-2h}{h\cdot x(x+h)} = \frac{-2}{x(x+h)}$.

Problema Resuelto 5: Cociente Diferencial con Radicales

Enunciado: Halle el cociente diferencial de $f(x) = \sqrt{x}$.
Solución: El cociente es $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$. Para simplificar, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$:
$\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$.
Cancelando h: $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Crecimiento Bacteriológico

Contexto: Un cultivo biológico modela su población con $P(t) = 2t^2 + 100$ en horas. Calcule la tasa promedio de crecimiento poblacional entre las horas 2 y 5.
Solución: $P(2) = 2(4) + 100 = 108$. $P(5) = 2(25) + 100 = 150$.
$\text{TCP} = \frac{150-108}{5-2} = \frac{42}{3} = 14$.
Respuesta: La población creció a un promedio de 14 bacterias por hora.

Aplicación 2: Finanzas Cuantitativas

Contexto: El valor de una acción en un modelo de arbitraje varía según $V(t) = -t^2 + 8t + 15$. Determine el cociente diferencial para proyectar la sensibilidad del precio en cualquier instante t.
Solución: $V(t+h) = -(t+h)^2 + 8(t+h) + 15 = -t^2 - 2th - h^2 + 8t + 8h + 15$.
Restando $V(t)$: $-2th - h^2 + 8h$. Dividiendo por h: $-2t - h + 8$.
Respuesta: La sensibilidad proyectada es $-2t - h + 8$.

Aplicación 3: Dinámica de Fluidos

Contexto: Un tanque drena agua y su volumen es $V(t) = 500 - 5t^2$ litros. Halle la TCP de drenaje en el intervalo $[0, 10]$ minutos.
Solución: $V(0) = 500$. $V(10) = 500 - 5(100) = 0$.
$\text{TCP} = \frac{0-500}{10-0} = -50$.
Respuesta: El volumen disminuye a una tasa promedio de 50 litros por minuto.

Aplicación 4: Emprendimiento Digital

Contexto: Los ingresos diarios de una plataforma de membresías siguen la curva $I(x) = 100\sqrt{x}$ dólares, donde x son los usuarios. Establezca la expresión del cociente diferencial de los ingresos.
Solución: Expresión: $\frac{100\sqrt{x+h}-100\sqrt{x}}{h} = 100\left[\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right]$.
Multiplicando por la conjugada, resulta $\frac{100}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.
Respuesta: La expresión general del ingreso marginal estimado es $\frac{100}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.

PROFE TEO
Las tasas de cambio pueden ser negativas. En contextos de aplicación, el signo negativo indica depreciación, descenso, pérdida o enfriamiento.

Aplicación 5: Física Cinemática

Contexto: Un objeto en caída libre recorre una distancia $s(t) = 4{,}9t^2$ metros. Encuentre el cociente diferencial que representa su velocidad promedio en un intervalo h.

Solución: $s(t+h) = 4{,}9(t+h)^2 = 4{,}9(t^2 + 2th + h^2)$.
$s(t+h) - s(t) = 9{,}8th + 4{,}9h^2$.
Dividiendo entre h, obtenemos $9{,}8t + 4{,}9h$.

Respuesta: La velocidad promedio en el intervalo temporal es $9{,}8t + 4{,}9h$ m/s.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos analíticos o gráficos.

1. Si la Tasa de Cambio Promedio de una función en un intervalo $[a, b]$ es cero, ¿qué nos dice esto sobre la posición de $f(a)$ y $f(b)$ en la gráfica?

2. Explique por qué el denominador en el cociente diferencial es exactamente h, y no $x + h$. Use la geometría de la recta secante para justificarlo.

3. Al simplificar un cociente diferencial polinómico, todos los términos del numerador que no contienen h se cancelan. Demuestre por qué esto siempre es cierto.

4. ¿Es posible que la TCP de una curva cuadrática (parábola) en un intervalo dado sea idéntica a la TCP de una recta en ese mismo intervalo? Argumente.

5. En la expresión del cociente diferencial, establecemos que $h \neq 0$. ¿Qué sucedería algebraicamente si evaluamos $h = 0$ al inicio del cálculo?

6. Si una función representa el costo de producir x artículos, ¿qué significado práctico tiene que la TCP en el intervalo $[100, 200]$ sea negativa?

7. El cociente diferencial de $f(x) = mx + b$ siempre resulta ser la constante m. Explique este fenómeno desde la perspectiva de las tasas de cambio.

8. Si calculamos el cociente diferencial para la función constante $f(x) = c$, el resultado es 0. ¿Por qué tiene sentido lógico y geométrico?

9. Al calcular el cociente de $f(x) = 1/x$, usamos fracciones algebraicas. ¿Qué restricción sobre x y $x + h$ debe existir implícitamente en el dominio?

10. Imagine que aproxima h a valores extremadamente pequeños (como 0,0001). ¿En qué objeto geométrico se convierte la recta secante?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle la TCP de $f(x) = x^2 + 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.

Guía de Solución Interactiva

1. Evalúa el límite inferior: $f(1) = (1)^2 + 2(1) =$ _____.
2. Evalúa el límite superior: $f(4) = (4)^2 + 2(4) =$ _____.
3. Aplica fórmula TCP: $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{\_\_\_\_ - \_\_\_\_}{3} = \frac{\_\_\_\_}{3} =$ _____.

Problema 2. Halle el cociente diferencial de $f(x) = 5x - 2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Sustituye $x + h$: $f(x + h) = 5(\_\_\_\_\_\_) - 2 = 5x + 5h - 2$.
2. Resta $f(x)$: $(5x + 5h - 2) - (\_\_\_\_\_\_\_\_) =$ _______.
3. Divide entre h: $\frac{\_\_\_\_\_\_}{h} =$ _____.

Problema 3. Exprese el cociente diferencial para $f(x) = -x^2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Expande con cuidado: $f(x + h) = -(\_\_\_\_\_\_\_\_)^2 = -x^2 - 2xh - h^2$.
2. Numerador de la fórmula: $(-x^2 - 2xh - h^2) - (\_\_\_\_) =$ ____________.
3. Divide y simplifica la h: $\frac{-2xh-h^2}{h} =$ _________.

PROFE TEO
¡Atención a la regla de los binomios! Recuerda que $(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$. Muchos alumnos escriben erróneamente $x^2 + h^2$.

Problemas Generales (Nivel Medio a Avanzado)

Problema 4. Calcule la TCP de $f(x) = 3x - 5$ en $[-2, 6]$.

Problema 5. Calcule la TCP de $f(x) = x^2 - x$ en $[2, 5]$.

Problema 6. Calcule la TCP de $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$.

Problema 7. Calcule la TCP de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 4]$.

Problema 8. Calcule la TCP de $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $[3, 8]$.

Problema 9. Halle el cociente diferencial de $f(x) = 7x + 10$.

Problema 10. Halle el cociente diferencial de $f(x) = 4 - 2x$.

Problema 11. Halle el cociente diferencial de $f(x) = x^2 + 4x$.

Problema 12. Halle el cociente diferencial de $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Problema 13. Simplifique el cociente diferencial de $f(x) = -3x^2 + 5$.

Problema 14. Simplifique el cociente diferencial de $f(x) = x^3$.

Problema 15. Simplifique el cociente diferencial de $f(x) = \frac{1}{2x}$.

Problema 16. Simplifique el cociente diferencial de $f(x) = \frac{3}{x+1}$.

Problema 17. Simplifique el cociente diferencial de $f(x) = \sqrt{3x}$.

Problema 18. Simplifique el cociente diferencial de $f(x) = x^3 - x^2$.

Problema 19. Simplifique el cociente diferencial de $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

Problema 20. Simplifique el cociente diferencial de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La ocupación de un alojamiento temporal sigue la ecuación $O(d) = 10d - d^2$ donde d son días. Halle la TCP de ocupación entre el día 1 y 4.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos $O(1) = 10(\_\_) - (\_\_)^2 = \_\_\_\_$. 2. Evaluamos $O(4) = 10(\_\_) - (\_\_)^2 = \_\_\_\_$. 3. TCP $= \frac{\_\_\_\_ - \_\_\_\_}{4-1} = \frac{\_\_\_\_}{3} = \_\_\_\_$ habitaciones/día.

Problema 2. Un modelo de comercio electrónico estima el tráfico según $T(x) = 2x^2 + 50$. Formule el cociente diferencial para medir variaciones del tráfico.

Guía de Solución Interactiva

1. $T(x+h) = 2(\_\_\_\_\_\_)^2 + 50 = 2x^2 + 4xh + 2h^2 + 50$. 2. $T(x+h) - T(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$. 3. Dividir por h da el modelo predictivo: $\_\_\_\_\_\_\_\_$.

Problema 3. La carga en un servidor central escala como $C(u) = 5u + 10$ terabytes. Determine la tasa de cambio usando el cociente diferencial.

Guía de Solución Interactiva

1. $C(u+h) = 5(\_\_\_\_) + 10 = \_\_\_\_\_\_\_\_$. 2. Numerador de la diferencia: $\_\_\_\_\_\_\_\_ - (5u + 10) = \_\_\_\_$. 3. Cociente final (tasa constante): $\frac{\_\_\_\_}{h} = \_\_\_\_$.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un análisis de datos predice la ganancia de una tienda temática con $G(m) = 400 + 10m^2$, con m en meses. Halle la TCP entre el mes 2 y el 6.

Problema 5. El voltaje en una resistencia térmica decae mediante $V(t) = \frac{100}{t}$. Halle la tasa promedio de cambio del voltaje del segundo 2 al segundo 10.

Problema 6. La posición de un ensamble robótico es $s(t) = t^3 - 2t$ mm. Calcule su velocidad promedio de movimiento entre los instantes $t = 1$ y $t = 3$ segundos.

Problema 7. Una bomba industrial drena químicos de un depósito bajo $V(t) = 800 - 4t^2$. Calcule el cociente diferencial para estimar la tasa instantánea de drenaje.

Problema 8. El área de propagación de una onda acústica es $A(r) = \pi r^2$. Plantee el cociente diferencial simplificado respecto al radio r.

Problema 9. En un invernadero automatizado, la humedad varía según $H(t) = \sqrt{2t + 4}$. Determine la TCP entre las horas $t = 0$ y $t = 6$.

Problema 10. Un algoritmo de inversión bursátil valora un activo como $P(x) = \frac{10}{x+2}$. Halle el cociente diferencial para modelar la volatilidad financiera.

Problema 11. La deflexión elástica de un puente se estima con $\delta(F) = 3F^2 - F + 4$. Simplifique la expresión del cociente diferencial respecto a la fuerza F.

Problema 12. La entropía de un sistema cerrado aumenta bajo $S(T) = \ln(T)$, pero en su fase lineal es $S(T) = 0{,}5T - 1$. Halle la TCP en $[4, 10]$ para la fase lineal.

Problema 13. Un dron topográfico mapea elevaciones mediante $E(x) = -x^3 + 12x$. Determine algebraicamente el cociente diferencial del perfil geológico.

Problema 14. La eficiencia en el enfriamiento láser de átomos es $C(v) = \frac{5}{v^2}$. Formule la expresión analítica del cociente diferencial de la eficiencia.

Problema 15. El impacto aerodinámico en un túnel de viento sigue $I(v) = 2v^3 - 5v^2$. Obtenga el polinomio exacto resultante del cociente diferencial.

Problema 16. La energía almacenada en un capacitor flexible es $W(x) = \sqrt{x}$. Plantee su cociente diferencial y use conjugadas para simplificar la tasa de carga.

Problema 17. Un satélite gasta combustible $C(t) = \frac{t}{t+1}$. Simplifique el cociente diferencial para medir el flujo marginal de propelente en órbita.

Problema 18. La compresión de datos de un servidor en la nube obedece a $D(x) = x^4$. Calcule la expresión del cociente diferencial para monitorear la compresión.

Problema 19. La dilatación volumétrica de un metal obedece $V(T) = 5T^2 + 3T - 7$. Halle la tasa promedio entre 10°C y 20°C de temperatura ambiente.

Problema 20. El empuje cinético de un reactor es $F(v) = \frac{2}{\sqrt{v}}$. Formule el cociente diferencial para este escenario termodinámico de alta complejidad.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 7
2. 5
3. $-2x-h$
4. 3
5. 6
6. 4
7. $-1/4$
8. $1/5$
9. 7
10. -2
11. $2x+h+4$
12. $4x+2h-3$
13. $-6x-3h$
14. $3x^2+3xh+h^2$
15. $\frac{-1}{2x(x+h)}$
16. $\frac{-3}{(x+1)(x+h+1)}$
17. $\frac{3}{\sqrt{3x+3h}+\sqrt{3x}}$
18. $3x^2+3xh+h^2-2x-h$
19. $\frac{-2}{(x-2)(x+h-2)}$
20. $\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$

Propuestos de Aplicación

1. 5 hab/día
2. $4x+2h$
3. 5
4. 80
5. -5
6. 11
7. $-8t-4h$
8. $2\pi r+\pi h$
9. $1/3$
10. $\frac{-10}{(x+2)(x+h+2)}$
11. $6F+3h-1$
12. 0,5
13. $-3x^2-3xh-h^2+12$
14. $\frac{-5(2v+h)}{v^2(v+h)^2}$
15. $6v^2+6vh+2h^2-10v-5h$
16. $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$
17. $\frac{1}{(t+1)(t+h+1)}$
18. $4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3$
19. 153
20. $\frac{-2}{\sqrt{v}\sqrt{v+h}(\sqrt{v}+\sqrt{v+h})}$

$\Delta x \to 0$

¡Llegaste al Final!

'El mundo no es estático, todo está en continuo cambio. Dominar el cociente diferencial es tener la llave maestra que abre las puertas del Cálculo Diferencial.'

- La dinámica del álgebra

¡Felicidades! Has superado uno de los puentes algebraicos más desafiantes. Ahora el límite y la derivada serán conceptos completamente naturales para ti.

$\lim$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com