

PRECÁLCULO

**COORDENADAS  
RECTANGULARES**

**CUADERNO DE TRABAJO**  
Fórmula de Distancia y Punto Medio

**Prof. Teófilo Teves**

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

## Teoría: Distancia y Punto Medio

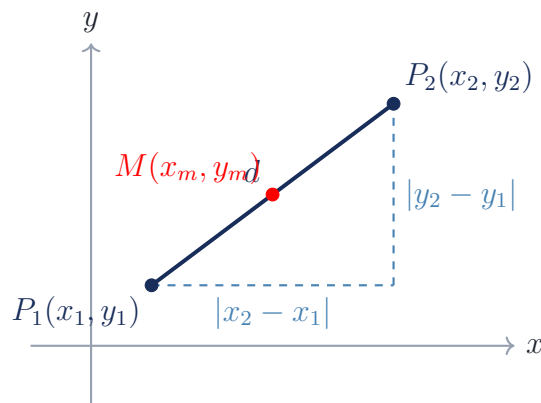
El plano cartesiano nos permite traducir la geometría al lenguaje del álgebra. Cada punto tiene una dirección exacta  $(x, y)$ . A partir de estas coordenadas, podemos medir qué tan lejos están dos objetos o encontrar su centro de equilibrio perfecto.

### 1. Fórmula de la Distancia

Dados dos puntos en el plano cartesiano  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , la distancia  $d$  entre ellos es la longitud del segmento de recta que los une. Se calcula como:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

*Nota: No importa el orden en que restes (ej.  $x_1 - x_2$ ), ya que al elevar al cuadrado el resultado siempre será positivo.*



### 2. Fórmula del Punto Medio

El punto medio  $M$  es el punto que divide al segmento de recta en dos partes exactamente iguales. Sus coordenadas son el **promedio** de las coordenadas de los extremos:

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

## Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Cálculo Directo

**Enunciado:** Halle la distancia y el punto medio entre  $A(-3, 4)$  y  $B(5, -2)$ .

**Solución:** Distancia:  $d = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ .

Punto Medio:  $M = \left( \frac{-3+5}{2}, \frac{4+(-2)}{2} \right) = \left( \frac{2}{2}, \frac{2}{2} \right) = (1, 1)$ .

**Respuesta:**  $d = 10$ ,  $M = (1, 1)$ .

.... ▷

### PROFE TEO

Chicos, la fórmula de la distancia no es magia nueva. ¡Es literalmente el Teorema de Pitágoras disfrazado! La hipotenusa es la distancia, y los catetos son las restas de las  $x$  y las  $y$ .

.... ▷

### PROFE TEO

**¡Cuidado visual!** En la distancia restamos las coordenadas. En el punto medio **sumamos** las coordenadas (promedio). Es el error más común confundir los signos en ambas fórmulas.

**Problema Resuelto 2: Hallar un Extremo Oculto**

**Enunciado:** El punto medio del segmento  $PQ$  es  $M(2, -1)$ . Si un extremo es  $P(-4, 3)$ , halle las coordenadas de  $Q(x, y)$ .

**Solución:** Usamos la fórmula del punto medio al revés:

$$\text{Eje } x: \frac{-4+x}{2} = 2 \implies -4 + x = 4 \implies x = 8.$$

$$\text{Eje } y: \frac{3+y}{2} = -1 \implies 3 + y = -2 \implies y = -5.$$

**Respuesta:** El punto  $Q$  es  $(8, -5)$ .

**Problema Resuelto 3: Coordenada Faltante dada la Distancia**

**Enunciado:** La distancia entre  $R(2, 1)$  y  $S(x, 5)$  es 5 unidades. Halle los posibles valores de  $x$ .

**Solución:** Planteamos:  $\sqrt{(x-2)^2 + (5-1)^2} = 5$ .

$$\text{Elevamos al cuadrado: } (x-2)^2 + 4^2 = 25 \implies (x-2)^2 + 16 = 25.$$

$(x-2)^2 = 9$ . Sacamos raíz cuadrada (¡doble signo!):

$$x-2 = 3 \implies x = 5 \quad \vee \quad x-2 = -3 \implies x = -1.$$

**Respuesta:**  $x = 5$  o  $x = -1$ .

**Problema Resuelto 4: Verificación de Triángulo Rectángulo**

**Enunciado:** Demuestre que los puntos  $A(1, 2)$ ,  $B(4, 7)$  y  $C(9, 4)$  forman un triángulo rectángulo.

**Solución:** Calculamos los cuadrados de las distancias (catetos/hipotenusa):

$$AB^2 = (4-1)^2 + (7-2)^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34.$$

$$BC^2 = (9-4)^2 + (4-7)^2 = 5^2 + (-3)^2 = 25 + 9 = 34.$$

$$AC^2 = (9-1)^2 + (4-2)^2 = 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68.$$

$$\text{Verificamos Pitágoras: } 34 + 34 = 68 \implies AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

**Conclusión:** Sí es un triángulo rectángulo (y además, isósceles).

**Problema Resuelto 5: Punto Equidistante en un Eje**

**Enunciado:** Halle un punto en el eje  $y$  que sea equidistante de  $P(-5, 2)$  y  $Q(3, 2)$ .

**Solución:** Si está en el eje  $y$ , el punto es  $K(0, y)$ . Equidistante significa  $d(K, P) = d(K, Q)$ .

$$\text{Igualamos distancias al cuadrado: } (0 - (-5))^2 + (y - 2)^2 = (0 - 3)^2 + (y - 2)^2.$$

$$25 + (y - 2)^2 = 9 + (y - 2)^2.$$

Aquí ocurre algo particular, los términos en  $y$  se cancelan:  $25 = 9$ .

Esto es falso. Pero notemos que  $P$  y  $Q$  comparten la coordenada  $y = 2$ . Su mediatriz es vertical.

El punto medio exacto es  $(-1, 2)$ . La recta mediatriz es  $x = -1$ .

**Respuesta:** ¡No existe ningún punto en el eje  $y$  ( $x = 0$ ) equidistante a ambos!

....▷

**PROFE TEO**

¡Ojo con esto! Al sacar la raíz cuadrada de una ecuación como  $(x-2)^2 = 9$ , siempre aparecen dos respuestas (el  $+3$  y el  $-3$ ). Hay dos puntos que cumplen la condición.

## Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Alcance de Radars

**Contexto:** Una torre de control está en el origen  $(0, 0)$ . Dos helicópteros de carga reportan sus ubicaciones en el plano (en km) en  $H_1(12, 16)$  y  $H_2(20, -15)$ . ¿Cuál helicóptero está más cerca de la base?

**Solución:**  $d_1 = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$  km.

$d_2 = \sqrt{20^2 + (-15)^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$  km.

**Respuesta:** El helicóptero  $H_1$  está más cerca.

### Aplicación 2: Ingeniería Estructural

**Contexto:** Un cable tensor sujeta una antena. Se ancla en el piso en  $(-8, 0)$  y se fija a la torre en  $(0, 15)$ . Halle la longitud exacta del cable metálico.

**Solución:**  $L = \sqrt{(0 - (-8))^2 + (15 - 0)^2}$ .

$L = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$ .

**Respuesta:** El cable mide exactamente 17 unidades.

### Aplicación 3: Logística y Entregas

**Contexto:** Un robot de almacén recoge paquetes en el nodo  $A(-4, 2)$  y debe dejarlos en el nodo  $B(10, -6)$ . Por seguridad, necesita recargar batería exactamente en la mitad de su trayecto. Halle dicha coordenada.

**Solución:**  $M = \left( \frac{-4+10}{2}, \frac{2+(-6)}{2} \right)$ .

$M = \left( \frac{6}{2}, \frac{-4}{2} \right) = (3, -2)$ .

**Respuesta:** La base de recarga está en  $(3, -2)$ .

### Aplicación 4: Extensión de Vías

**Contexto:** Un tren minero tiene un tramo recto desde el acopio en  $(3, 5)$  hasta una estación media en  $(7, 8)$ . Si la vía continúa recta duplicando su longitud, halle la coordenada del terminal final.

**Solución:** La estación media es el punto medio  $M(7, 8)$ . El terminal  $T(x, y)$  es el otro extremo.

$\frac{3+x}{2} = 7 \implies 3+x = 14 \implies x = 11$ .

$\frac{5+y}{2} = 8 \implies 5+y = 16 \implies y = 11$ .

**Respuesta:** El terminal final está en  $(11, 11)$ .

....▷

### PROFE TEO

Noten cómo los contextos cambian, pero la matemática subyacente es exactamente la misma. ¡Saber abstraer es la habilidad real de un ingeniero!

**Aplicación 5: Perímetro de Delimitación**

**Contexto:** Se delimita un campo de cultivo triangular en los puntos  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$  y  $(3, 4)$  usando alambre electrificado. Calcule los metros totales de alambre requeridos para rodear el terreno.

**Solución:** Distancia  $d_1(0, 0) \rightarrow (6, 0) = 6$ .

Distancia  $d_2(6, 0) \rightarrow (3, 4) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ .

Distancia  $d_3(3, 4) \rightarrow (0, 0) = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ .

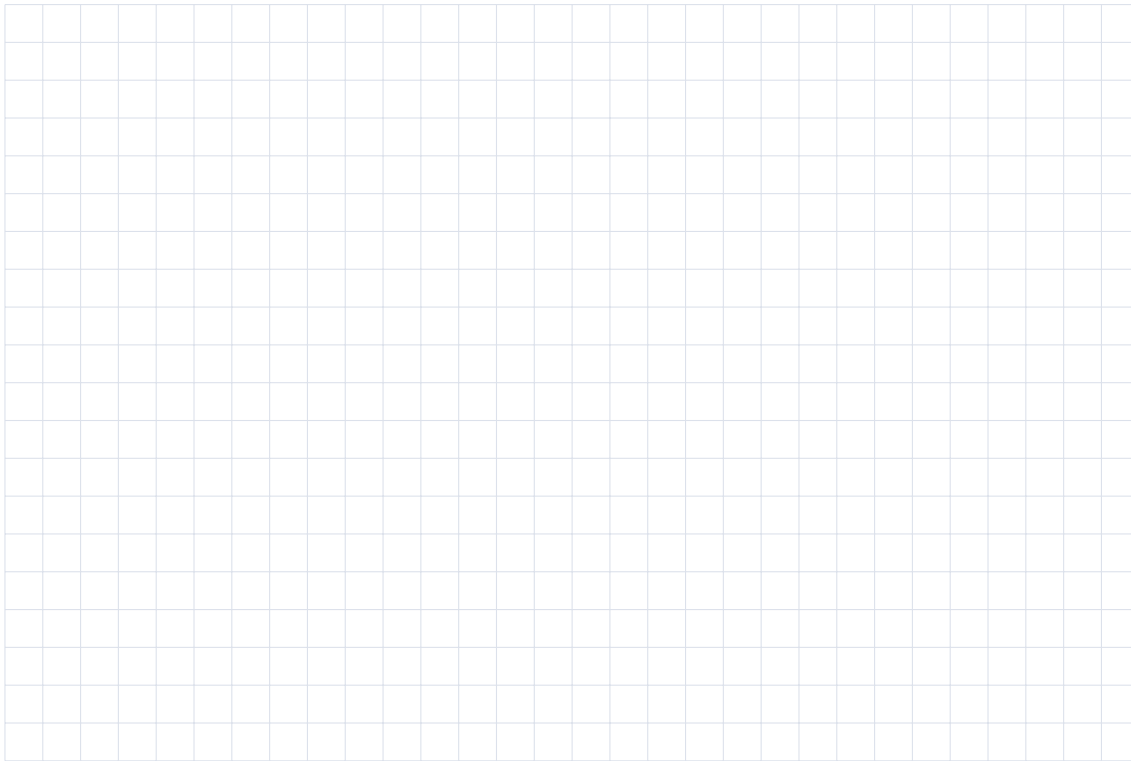
Perímetro =  $6 + 5 + 5 = 16$ .

**Respuesta:** Se requieren 16 metros de alambre.

## Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos o lógicos.

1. ¿Por qué matemáticamente la distancia entre dos puntos jamás resulta ser un número negativo? Refiérase a la fórmula general.
2. Si el punto medio de un segmento es el mismo origen de coordenadas  $(0, 0)$ , ¿qué relación existe entre las coordenadas de los puntos extremos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ ?
3. Un estudiante calcula la distancia entre  $(2, 5)$  y  $(8, 13)$  restando  $(2 - 8)^2 + (13 - 5)^2$ . ¿Es válido alterar el orden de resta en un eje respecto al otro?
4. La distancia entre  $A$  y  $B$  es 5, y entre  $B$  y  $C$  es 4. ¿Garantiza esto que la distancia de  $A$  a  $C$  sea 9? ¿Bajo qué única condición esto sería verdad? (Piense en colinealidad).
5. Explique por qué el punto medio representa el "promedio estadístico" de las coordenadas bidimensionales de un segmento.
6. Geométricamente, ¿qué figura representa el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  cuya distancia a un punto fijo  $(h, k)$  es exactamente igual a un radio constante  $r$ ?
7. Si le piden hallar un punto en el eje  $x$  que equidiste de dos puntos fijos, ¿qué coordenada tiene un valor garantizado antes de hacer cualquier cálculo?
8. Dados tres puntos, si el cuadrado de la distancia mayor es estrictamente menor a la suma de los cuadrados de las distancias menores, ¿qué tipo de triángulo se forma?
9. El centroide (baricentro) de un triángulo es el promedio de sus tres vértices. Deduzca la fórmula de las coordenadas del baricentro  $(x_c, y_c)$ .
10. Si en el plano cartesiano multiplicamos las coordenadas de dos puntos por  $-1$ , ¿qué le ocurre a la distancia entre ellos y qué transformación isométrica representa?



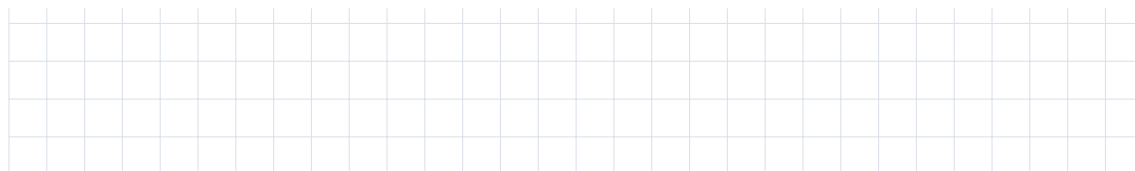




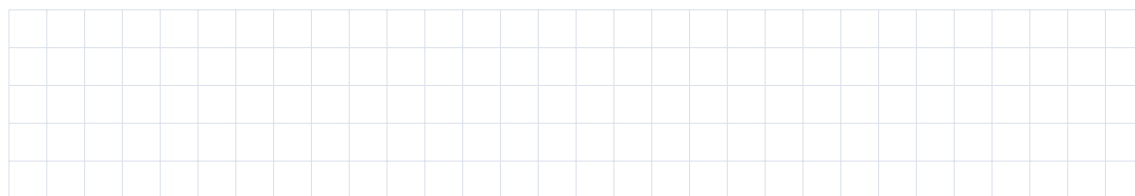




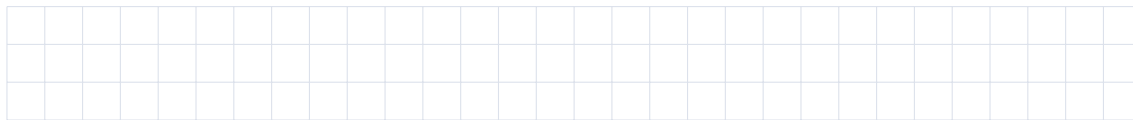
**Problema 19.** Los vértices opuestos de un rectángulo están en  $(2, 1)$  y  $(8, 9)$ . Si los lados son paralelos a los ejes, halle las coordenadas de los otros dos vértices.



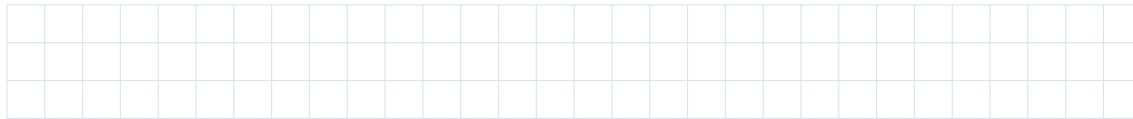
**Problema 20.** Halle la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos  $P(x, y)$  cuya distancia al origen sea igual a su distancia al punto  $(4, 0)$ .



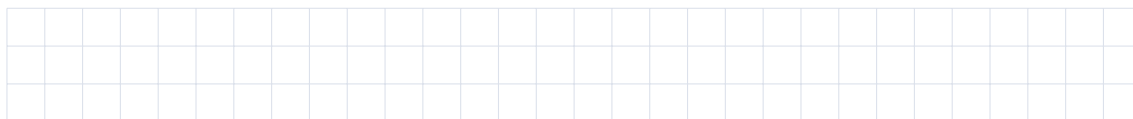




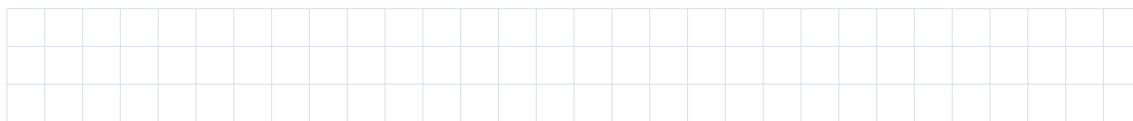
**Problema 5.** Una red wifi direccional vincula el router  $A(10, 20)$  con el nodo esclavo  $B(-5, -5)$ . El instalador necesita empalmar fibra en el centro exacto. Encuentre el punto de empalme.



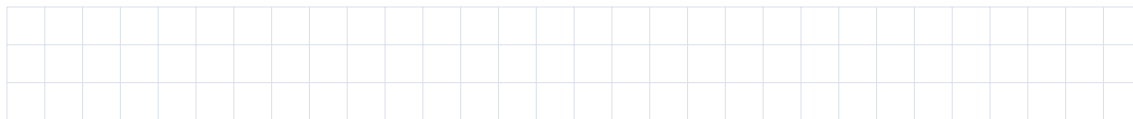
**Problema 6.** Un dron de mapeo detecta una falla térmica en un panel solar ubicado en  $(8, 15)$  metros. A qué distancia lineal está el problema si la central receptora es el origen.



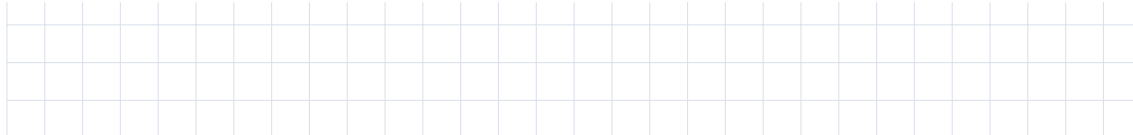
**Problema 7.** El diseño de un videojuego 2D programa una bala láser que cruza desde  $(x, 3)$  hasta un blanco en  $(7, 6)$ . Si el láser viaja 5 píxeles, calcule las posibles posiciones de disparo.



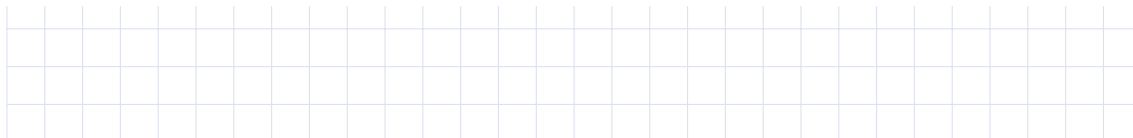
**Problema 8.** Para instalar un teleférico turístico, los ingenieros miden la base en  $(-4, 1)$  y la cima montañosa en  $(2, 9)$  hectómetros. Estime los hectómetros de cable principal requeridos.



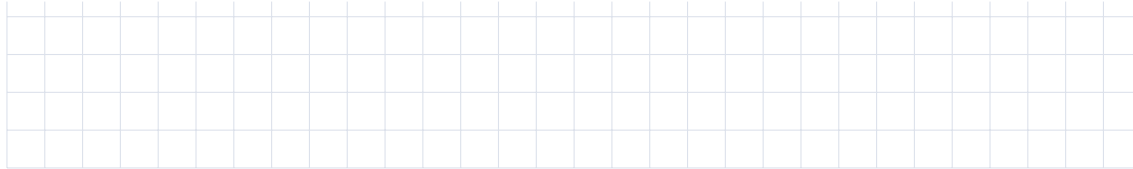
**Problema 9.** Una antena celular abarca un radio circular perfecto. Si su base emite desde  $(-1, 4)$  y su señal llega con éxito hasta el borde en  $(3, 7)$  km, dimensione el diámetro de cobertura.



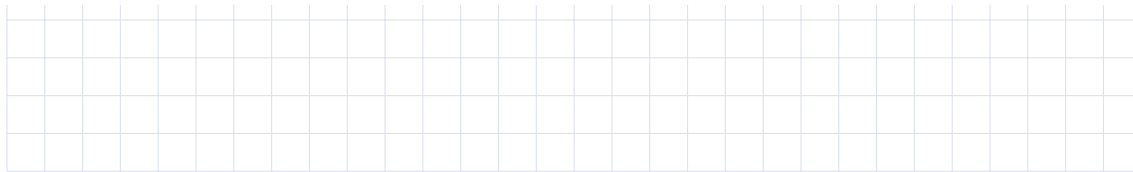
**Problema 10.** En un escáner de resonancia, un tumor traza un polígono con nodos en  $(-2, -1)$ ,  $(1, -1)$  y  $(1, 3)$  cm. Verifique si el área afectada forma un contorno de triángulo rectángulo.



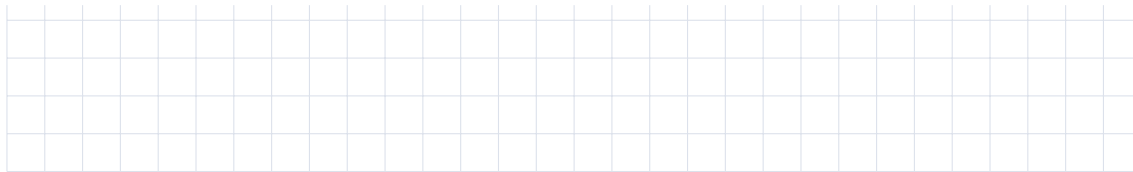




**Problema 17.** Un puente atirantado posee dos pilones principales en  $(-10, 50)$  y  $(10, 50)$  metros. Un tirante transversal recto ancla en el origen y otro al centro de los pilones. Halle este punto central.



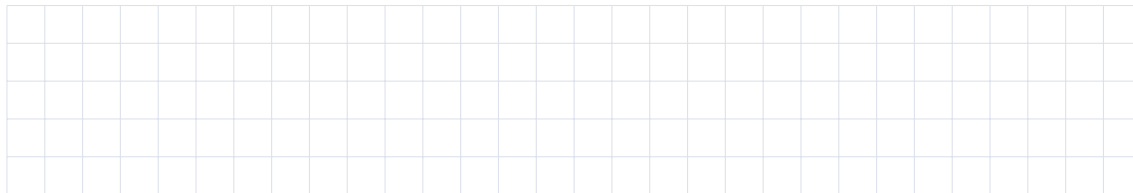
**Problema 18.** Un robot aspirador limpia un cuarto cuadrado. Conoce dos vértices diagonales diametralmente opuestos en  $(1, 1)$  y  $(7, 9)$  cm. Calcule la superficie total que el robot deberá aspirar.



**Problema 19.** Tres estaciones meteorológicas están situadas en  $(1, -2)$ ,  $(5, -4)$  y  $(-2, 7)$ . El servidor central recopilador se instalará en el baricentro del triángulo. Halle sus coordenadas exacto.



**Problema 20.** Una balística forense proyecta una pared límite en el eje  $y$ . Dos francotiradores se ubican en  $(4, 2)$  y  $(-2, 4)$ . Halle el punto de impacto sobre el muro  $y$  equidistante a ambos.



## Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

- $d = 10$
- $M(2, 5)$
- $Q(-4, 3)$
- $d = 17$
- $M(-1, -3)$
- $Q(7, 2)$
- $d = 13$
- $y = 7 \vee y = 1$
- $d_1 = 5, d_2 = 5$  (isósceles)
- Perímetro = 14
- $(-1/3, 0)$
- $C(6, 8)$
- $(-1, 0), (2, -2), (5, -4)$
- $d_1 = \sqrt{20}, d_2 = \sqrt{20}, d_{total} = \sqrt{80} \implies 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$  (Sí son)
- $r = 5 \implies D = 10$
- $x = \sqrt{5}$  (Considerando solo la raíz real positiva)
- Lado<sup>2</sup> = 50, Área = 50
- $G(2, 3)$
- $(2, 9)$  y  $(8, 1)$
- Recta mediatriz:  $x = 2$

### Propuestos de Aplicación

- 10 años luz.
- Bomba en  $(7, 10)$ .
- Estaca final en  $(5, 6)$ .
- Longitud = 5 millas.
- Empalme en  $(2, 5, 7, 5)$ .
- $d = 17$  metros.
- $x = 3 \vee x = 11$ .
- 10 hectómetros.
- Radio = 5  $\implies$  Diámetro = 10 km.
- Lados 3, 4, 5. Sí, es rectángulo.
- Bote en  $(-4, 2)$ .
- Lados 10, 13, 13  $\implies$  Tubería = 36 km.
- Foco central en  $(1, 1)$ .
- Micrófono en  $(1, 0)$ .
- $d_1 = \sqrt{13}, d_2 = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}, d_{tot} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ . (Sí viaja recto).
- Radio = 5 km.
- Pilón central  $(0, 50)$ .
- Diagonal<sup>2</sup> = 100  $\implies$  Área =  $100/2 = 50 \text{ cm}^2$ .
- Servidor en  $(4/3, 1/3)$ .
- Punto de impacto  $(0, 0)$ .

$M(x_m, y_m)$

## ¡Llegaste al Final!

'Conocer tu punto de partida y tu meta te permite calcular el esfuerzo exacto. Mantente centrado, encuentra tu punto medio de equilibrio y llegarás lejos.'

- La geometría del éxito

¡Felicidades! Has dominado los cimientos del plano cartesiano. El precálculo y la geometría analítica ahora están a tus pies.

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

$\sqrt{\Delta x^2}$