

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

**REGLAS DEL  
PRODUCTO Y COCIENTE**

CUADERNO DE TRABAJO  
Demostraciones Formales y Aplicaciones  
Avanzadas

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

# Teoría: Estructuras Multiplicativas y Fraccionarias

Cuando operamos con combinaciones de funciones, la derivada rompe con la intuición lineal. La derivada de un producto no es simplemente el producto de las derivadas individuales, así como la derivada de un cociente no es el cociente de sus componentes. El entrelazamiento de las variables exige construcciones analíticas rigurosas.

## 1. Regla del Producto y su Demostración

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables. Su producto  $u(x) = f(x)g(x)$  es derivable y su operador dicta:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**Demostración Geométrica Intuitiva:** Imagine un rectángulo cuyos lados crecen continuamente midiendo  $f(x)$  y  $g(x)$ . El incremento del área total  $\Delta A$  se compone de tres áreas incrementales:

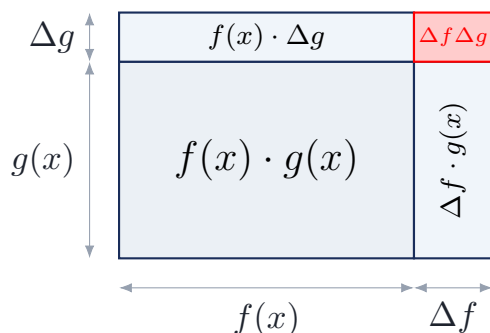
$$\Delta A = \Delta f \cdot g(x) + f(x) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g$$

Al dividir toda la expresión entre el incremento del paso  $\Delta x$  y aplicar el límite matemático cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , el término final  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta g \rightarrow f'(x) \cdot 0 = 0$ , consolidando rigurosamente el teorema.

## 2. Regla del Cociente y su Estructura

Sea  $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  con  $g(x) \neq 0$ . Su derivada se define formalmente como:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$



....▷

### PROFE TEO

¡Un error clásico! Muchos creen flojamente que  $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ . Si haces eso en una práctica, estás liquidado. La derivada del producto involucra variaciones cruzadas.

....▷

### PROFE TEO

¡Mucho cuidado con el signo del numerador en el cociente! Como es una resta, el orden es innegociable: siempre va primero la derivada del de arriba por el de abajo sin tocar.

## Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Producto Algebraico Exponencial

**Enunciado:** Desarrolle la derivada de la función  $f(x) = (x^2 - 3x)(x^4 + 5)$ .

**Solución:** Identificamos los factores:  $u = x^2 - 3x \implies u' = 2x - 3$ , y  $v = x^4 + 5 \implies v' = 4x^3$ . Aplicamos la regla del producto cruzado ( $u'v + uv'$ ):

$$f'(x) = (2x - 3)(x^4 + 5) + (x^2 - 3x)(4x^3)$$

Expandimos los términos algebraicos de forma distributiva:

$$f'(x) = (2x^5 + 10x - 3x^4 - 15) + (4x^5 - 12x^4)$$

Agrupamos monomios semejantes ordenando el polinomio final:

$$f'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x - 15$$

....▷

### PROFE TEO

A veces, si los factores son polinomios sencillos, expandirlos antes de derivar te ahorrará aplicar la regla del producto. ¡Elige el camino más eficiente!

### Problema Resuelto 2: Cociente Racional Clásico

**Enunciado:** Halle la derivada de la función racional  $g(x) = \frac{2x-1}{x^2+3}$ .

**Solución:** Determinamos los elementos: numerador  $f = 2x - 1 \implies f' = 2$ ; denominador  $g = x^2 + 3 \implies g' = 2x$ . Estructuramos mediante el operador del cociente  $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ :

$$g'(x) = \frac{2(x^2 + 3) - (2x - 1)(2x)}{(x^2 + 3)^2}$$

Efectuamos el álgebra del numerador distribuyendo los signos de la resta:

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 6 - (4x^2 - 2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6 - 4x^2 + 2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 6}{(x^2 + 3)^2}$$

**Problema Resuelto 3: Producto Triple Combinado**

**Enunciado:** Encuentre la derivada de  $y = x^3 \cdot (x^2 + 1) \cdot (3x - 2)$ .

**Solución:** Para evitar una doble regla del producto, asociamos multiplicando los dos primeros términos:  $y = (x^5 + x^3)(3x - 2)$ . Derivamos aplicando la regla estándar de dos factores:

$$y' = (5x^4 + 3x^2)(3x - 2) + (x^5 + x^3)(3)$$

Expandimos algebraicamente y reducimos términos idénticos:

$$y' = (15x^5 - 10x^4 + 9x^3 - 6x^2) + (3x^5 + 3x^3)$$

$$y' = 18x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 6x^2$$

**Problema Resuelto 4: Cociente con Raíces**

**Enunciado:** Obtenga la derivada analítica de  $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ .

**Solución:** Numerador:  $x^{1/2} \implies \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Denominador:  $x + 1 \implies 1$ . Aplicamos el algoritmo de derivación fraccionaria:

$$h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x+1) - (\sqrt{x})(1)}{(x+1)^2}$$

Multiplicamos numerador por  $2\sqrt{x}$  para homogeneizar la fracción superior:

$$h'(x) = \frac{\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

**Problema Resuelto 5: Pendiente de Recta Tangente**

**Enunciado:** Halle la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = \frac{x^2}{2x-1}$  en el punto crítico  $x = 1$ .

**Solución:** Primero calculamos la función derivada genérica mediante la regla del cociente:

$$y' = \frac{(2x)(2x-1) - (x^2)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2}$$

Para hallar la pendiente de la tangente en  $x = 1$ , evaluamos la derivada en dicho punto:

$$m = y'(1) = \frac{2(1)^2 - 2(1)}{(2(1) - 1)^2} = \frac{2 - 2}{(1)^2} = 0$$

**Conclusión:** La curva posee una tangente horizontal ( $m = 0$ ) en las coordenadas dadas.

.... ▷

**PROFE TEO**

Cuando tengas una constante en el numerador, no uses la regla del cociente de forma automática. Sube el denominador con potencia negativa, ¡así es mucho más rápido!

## Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Finanzas Cuánticas y Valor de Cartera

**Contexto:** Un algoritmo de negociación calcula el capital combinado de un portafolio multiplicando el valor del activo fijo  $P(t) = 2t + 5$  por el volumen de contratos  $C(t) = t^2 + 3t$ . Obtenga la tasa de variación instantánea del patrimonio neto acumulado al cumplirse el segundo día.

**Solución:** El capital total es  $E(t) = P(t) \cdot C(t)$ . Aplicamos la derivada del producto:

$$E'(t) = P'(t)C(t) + P(t)C'(t) = 2(t^2 + 3t) + (2t + 5)(2t + 3)$$

Evaluamos exactamente en el instante financiero  $t = 2$ :

$$E'(2) = 2(4 + 6) + (4 + 5)(4 + 3) = 2(10) + 9(7) = 20 + 63 = 83 \text{ USD/s}$$

### Aplicación 2: Caudal Hidrodinámico en Toberas

**Contexto:** El flujo de masa inyectado en un motor de propulsión aeroespacial criogénico se rige bajo el cociente gaseoso de combustión  $F(t) = \frac{3t^2+1}{2t+3}$  kg/s. Calcule la rapidez de variación instantánea del caudal de propelente consumido al primer segundo del despegue.

**Solución:** Aplicamos la regla del cociente para hallar la tasa instantánea de inyección:

$$F'(t) = \frac{(6t)(2t+3) - (3t^2+1)(2)}{(2t+3)^2}$$

Evaluamos la variación del flujo en el tiempo de despegue  $t = 1$ :

$$F'(1) = \frac{6(5) - (4)(2)}{(5)^2} = \frac{30 - 8}{25} = \frac{22}{25} = 0,88 \text{ kg/s}^2$$

### Aplicación 3: Oncología Médica y Expansión Celular

**Contexto:** El volumen volumétrico de una masa tumoral sintética sometida a radiación controlada se modela por el producto biológico de cultivo celular  $V(t) = (t+2)\sqrt{t}$  centímetros cúbicos. Precise la velocidad de expansión de la biomasa pasadas cuatro horas de monitoreo.

**Solución:** Reescribimos la función exponencial fraccionaria:  $V(t) = (t+2)t^{1/2}$ . Derivamos por producto:

$$V'(t) = (1)(t^{1/2}) + (t+2) \left( \frac{1}{2}t^{-1/2} \right) = \sqrt{t} + \frac{t+2}{2\sqrt{t}}$$

Evaluamos la tasa de crecimiento biológico en el tiempo clínico  $t = 4$ :

$$V'(4) = \sqrt{4} + \frac{4+2}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{6}{4} = 2 + 1,5 = 3,5 \text{ cm}^3/\text{h}$$

....>

### PROFE TEO

Las tasas de cambio en ingeniería miden cómo interactúan los sistemas mecánicos. Si multiplicas variables dinámicas, la regla del producto gobernará las variaciones de energía.

**Aplicación 4: Telecomunicaciones y Tráfico de Servidores**

**Contexto:** La latencia de congestión de datos en un clúster de servidores de procesamiento masivo distribuye paquetes según la función racional  $L(w) = \frac{w^3}{w^2+4}$  megabits por segundo. Deduzca el cambio instantáneo de carga al segundo dos.

**Solución:** Derivamos la función informática aplicando la ley analítica del cociente:

$$L'(w) = \frac{(3w^2)(w^2 + 4) - (w^3)(2w)}{(w^2 + 4)^2} = \frac{3w^4 + 12w^2 - 2w^4}{(w^2 + 4)^2} = \frac{w^4 + 12w^2}{(w^2 + 4)^2}$$

Evaluamos en la marca de tiempo de red  $w = 2$ :

$$L'(2) = \frac{(2)^4 + 12(2)^2}{((2)^2 + 4)^2} = \frac{16 + 12(4)}{(4 + 4)^2} = \frac{16 + 48}{64} = \frac{64}{64} = 1 \text{ Mbps/s}$$

**Aplicación 5: Ingeniería de Viento y Torque Cinético**

**Contexto:** El torque mecánico de un aerogenerador marino varía bajo ráfagas según el producto aerodinámico  $E(v) = (15 - v)(v^2 + 2)$  vatios. Obtenga el ritmo de variación instantánea de transferencia energética si la velocidad del viento mide tres metros por segundo.

**Solución:** Derivamos el rendimiento energético combinando las variables cinéticas por producto:

$$E'(v) = (-1)(v^2 + 2) + (15 - v)(2v) = -v^2 - 2 + 30v - 2v^2 = -3v^2 + 30v - 2$$

Evaluamos en la velocidad del flujo de aire exterior de diseño  $v = 3$ :

$$E'(3) = -3(3)^2 + 30(3) - 2 = -3(9) + 90 - 2 = -27 + 90 - 2 = 61 \text{ W/(m/s)}$$

## Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

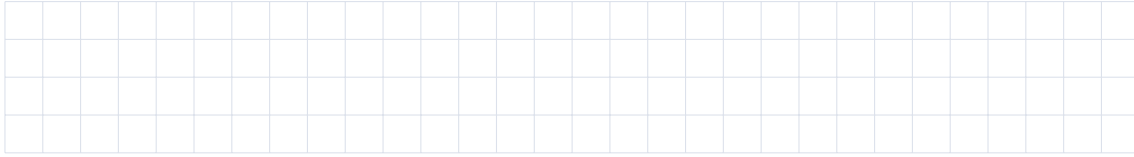
1. Utilice la definición formal de límite para justificar por qué aparece el término cruzado  $f(x)g'(x)$  al deducir analíticamente la regla de la derivada del producto.
2. Explique detalladamente el origen geométrico del signo negativo que divide los términos algebraicos del numerador en la ley de derivación del cociente.
3. Si dos funciones no constantes poseen derivadas estrictamente positivas en todo su dominio, ¿puede la derivada de su cociente resultar negativa en algún tramo? Ejemplifique.
4. Un estudiante afirma que la derivada de  $y = \frac{1}{f(x)}$  se resuelve fijando  $-f'(x)/[f(x)]^2$ . Compruebe la validez de dicha fórmula aplicando la regla del cociente.
5. Argumente lógicamente por qué la derivada de un producto triple  $(f \cdot g \cdot h)'$  genera una suma de tres términos cruzados en lugar de dos componentes.
6. En análisis económico, si el ingreso es el producto del precio por la demanda, relacione la regla del producto con la tasa marginal de ingresos corporativos.
7. Analice el comportamiento de la regla del cociente si el denominador es una función constante  $g(x) = k$ . Demuestre que el operador colapsa a la regla del múltiplo constante.
8. Si la derivada del producto de dos funciones derivables es idénticamente nula en un intervalo, ¿qué relación geométrica guardan las curvas de ambas funciones?
9. Explique por qué la regla del cociente requiere obligatoriamente que la función del denominador sea diferente de cero en el punto de evaluación analítica.
10. Diseñe una estrategia algebraica para derivar la estructura racional  $y = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x}$  evitando por completo el algoritmo del cociente.



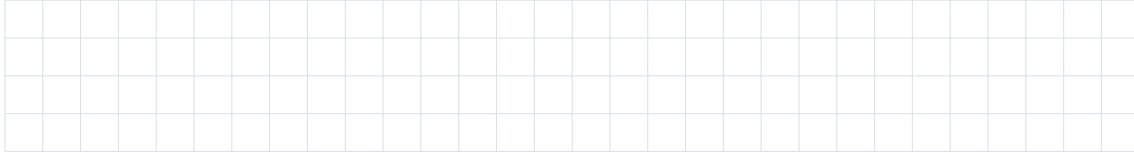








**Problema 20.** Halle la segunda derivada formal  $f''(x)$  para la estructura distributiva  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ .











## Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

- $16x^3 - 3x^2 + 16x - 2$ .
- $\frac{3x^2+4x}{(3x+2)^2}$ .
- $\frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$ .
- $30x^4 - 48x^3 + 9x^2 - 20x + 20$ .
- $\frac{5x^2-2x+4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ .
- $\frac{2x^3-12x^2}{(x-4)^2}$ .
- $\frac{-13}{(3x+5)^2}$ .
- $6x^5 - 5x^4 + 32x^3 - 12x^2$ .
- $m = 3/4$ .
- Tasa de cambio = 6.
- Puntos: (0, 0) y (2, 4).
- $\frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ .
- $5x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 4x$ .
- $\frac{-2x^2-4x-2}{(x^2-1)^2}$ .
- $\frac{13}{3}x^{10/3} - \frac{7}{3}x^{4/3} + \frac{7}{3}x^{-2/3}$ .
- $\frac{-2t+15}{t^4}$ .
- Ecuación:  $y = 0$ .
- $h'(2) = 11/9$ .
- Sí, ocurre en  $x = 1$  y  $x = 3$ .
- $f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$ .

### Propuestos de Aplicación

- $-2x$ , 3,  $-2 \text{ m}^3/\text{s}$ .
- 1, 2, 0,75 lúmenes/s.
- 2,  $2t$ , 14 g/h.
- $30/49 \text{ mm/s}$ .
- $-7 \text{ unidades/ms}$ .
- $23/25 \text{ L/mol}$ .
- $125 \text{ J/grado}$ .
- $-14/25 \text{ N/(rad/s)}$ .
- $4 \text{ mm/rad}$ .
- $3/50 \text{ W/s}$ .
- $-3 \text{ dB/Hz}$ .
- $27/16 \text{ MJ/m}$ .
- $-17 \text{ mbar/km}$ .
- $1/4 \text{ MPa/unidad}$ .
- 32 hashes/iteración.
- $7/16 \text{ mg/s por mM}$ .
- $8 \text{ m}^3/\text{s}$ .
- $16/25 \text{ W/unidad}$ .
- $16 \text{ A/V}$ .
- $27/16 \text{ unidades de arrastre}$ .

$$u'v + uv'$$

## ¡Optimización Cruzada Completada!

'Los grandes resultados en la vida real nunca provienen de una simple suma lineal de esfuerzos aislados; surgen del producto entrelazado de tu constancia multiplicado por la estrategia adecuada. Cuando divides tus problemas de forma analítica, el denominador de la incertidumbre se reduce a cero.'

- El balance fundamental del cálculo diferencial

¡Felicidades por tu disciplina! Has dominado los algoritmos más potentes de las tasas de cambio compuestas.

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

*g<sup>2</sup>*