CÁLCULO DE UNA VARIABLE

REGLAS BÁSICAS
DE DERIVACIÓN

CUADERNO DE TRABAJO

Potencias, Constantes y Sumas

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Atajo del Cálculo

Calcular derivadas utilizando el límite del cociente diferencial es un proceso riguroso pero extremadamente largo. Afortunadamente, los matemáticos descubrieron patrones algebraicos que nos permiten derivar funciones complejas en cuestión de segundos.

1. Regla de la Constante y Múltiplo Constante

La derivada de cualquier número constante c es cero, porque una constante no cambia (su pendiente es cero).

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Si una constante multiplica a una función, la constante .$^{\text{es}}$pera afuera"mientras derivas la función:

$$\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$$

PROFE TEO

¡Regla de oro! Antes de derivar, reescribe SIEMPRE las raíces como exponentes fraccionarios y las "x.$^{\text{en}}$ el denominador como exponentes negativos. Te ahorrarás horas de sufrimiento.

2. Regla de la Potencia

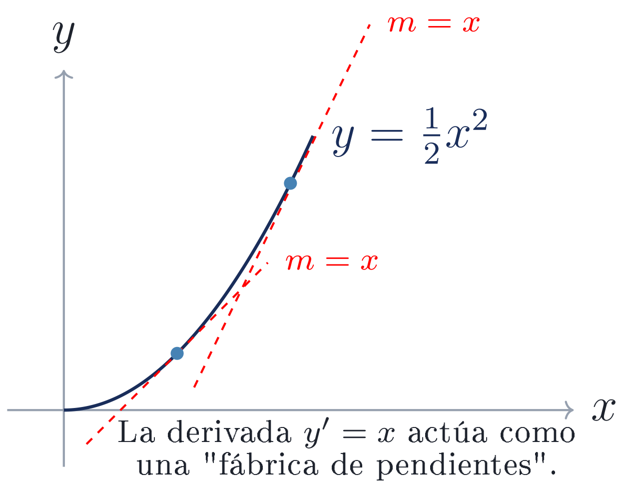
Para cualquier número real n, para derivar x^n, bajamos el exponente a multiplicar y le restamos 1 al nuevo exponente:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

3. Regla de Sumas y Restas

La derivada de una suma o resta de funciones es simplemente la suma o resta de sus derivadas individuales:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$



La derivada $y' = x$ actúa como una "fábrica de pendientes".

PROFE TEO

¡Cuidado! π y e son números. La derivada de π^2 es 0, no 2π. ¡No te dejes engañar en los exámenes!

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Polinomio Directo

Enunciado: Derive la función $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 9$.
Solución: Aplicamos la regla de potencias y sumas/restas a cada término:

$$f'(x) = 5(4x^3) - 3(2x^1) + 7(1x^0) - 0$$

Recordando que $x^0 = 1$:

$$f'(x) = 20x^3 - 6x + 7$$

PROFE TEO

Si tienes un binomio o trinomio al cuadrado, como $(x+3)^2$, y aún no te han enseñado la Regla de la Cadena, simplemente expándelo algebraicamente primero y luego deriva.

Problema Resuelto 2: Preparación Algebraica (Raíces)

Enunciado: Calcule la derivada de $y = 4\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$.
Solución: Primero, reescribimos la función usando exponentes fraccionarios y negativos:

$$y = 4x^{1/2} - 3x^{-1/3}$$

Ahora aplicamos la regla de la potencia:

$$y' = 4\left(\frac{1}{2}\right)x^{-1/2} - 3\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}$$

$$y' = 2x^{-1/2} + x^{-4/3} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

Problema Resuelto 3: División por un Monomio

Enunciado: Derive la función $g(t) = \frac{t^3+2t^2-5}{t^2}$.
Solución: ¡No uses la complicada regla del cociente todavía! Como el denominador es un solo término, dividimos cada parte del numerador:

$$g(t) = \frac{t^3}{t^2} + \frac{2t^2}{t^2} - \frac{5}{t^2} = t + 2 - 5t^{-2}$$

Derivamos término a término:

$$g'(t) = 1 + 0 - 5(-2t^{-3}) = 1 + 10t^{-3} = 1 + \frac{10}{t^3}$$

Problema Resuelto 4: Constantes Engañosas

Enunciado: Halle $\frac{dy}{dx}$ para la función $y = \pi^3 x^2 + e^2 x - \sqrt{5}$.
Solución: Aquí π, e y $\sqrt{5}$ son simples constantes numéricas. Las tratamos como múltiplos constantes o términos nulos según correspondan:

$$y' = \pi^3(2x) + e^2(1) - 0$$

$$y' = 2\pi^3 x + e^2$$

Problema Resuelto 5: Puntos de Tangente Horizontal

Enunciado: Determine en qué puntos la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tiene tangentes horizontales.
Solución: Las tangentes horizontales tienen pendiente cero, por lo que buscamos dónde $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Igualamos a cero: $3x^2 - 3 = 0 \implies 3(x^2 - 1) = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$. Hallamos las coordenadas Y evaluando en $f(x)$: Para $x = 1 \implies f(1) = 0$. Punto: $(1, 0)$. Para $x = -1 \implies f(-1) = 4$. Punto: $(-1, 4)$.

PROFE TEO

Las tangentes horizontales ocurren cuando $f'(x) = 0$. Son los puntos más importantes de una curva porque representan los "picos"(máximos) y los "valles"(mínimos).

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Aceleración de un Tesla

Contexto: Un vehículo autónomo se desplaza en línea recta modelando su posición mediante la función polinómica $s(t) = 4t^3 - 2t^2$ metros. Calcule algebraicamente la velocidad exacta del automóvil eléctrico al transcurrir dos segundos cronometrados.
Solución: La velocidad es la derivada de la posición: $v(t) = s'(t) = 12t^2 - 4t$. Evaluamos en $t = 2$: $v(2) = 12(4) - 4(2) = 48 - 8 = 40$. **Respuesta:** La velocidad instantánea es 40 m/s.

Aplicación 2: Costo Marginal Empresarial

Contexto: El costo en dólares de ensamblar drones agrícolas obedece a $C(x) = 1500 + 3x + 0{,}02x^2$. Determine el costo marginal instantáneo que experimenta la fábrica al producir exactamente el dron número cincuenta en la línea.
Solución: El costo marginal es $C'(x) = 3+0{,}04x$. Evaluamos la producción de cincuenta: $C'(50) = 3 + 0{,}04(50) = 3 + 2 = 5$. **Respuesta:** El costo marginal es de \$5 por dron.

Aplicación 3: Dinámica de Fluidos

Contexto: El volumen hidráulico remanente vaciándose de una presa sectorial drena según $V(t) = 100(10 - t)^2$ litros. Encuentre la tasa instantánea de drenaje volumétrico al octavo minuto operativo usando la expansión de binomios.
Solución: Expandimos: $V(t) = 100(100 - 20t + t^2) = 10000 - 2000t + 100t^2$. Derivamos: $V'(t) = -2000 + 200t$. Evaluamos $t = 8$: $V'(8) = -2000 + 1600 = -400$. **Respuesta:** Drena a 400 L/min.

Aplicación 4: Tasa de Crecimiento Forestal

Contexto: La altura maderable de un pino transgénico cultivado escala anualmente siguiendo $H(t) = 4\sqrt{t} + 2t$ metros. Verifique la rapidez de crecimiento forestal registrada en el noveno año de siembra supervisada.
Solución: Reescribimos: $H(t) = 4t^{1/2} + 2t$. Derivamos: $H'(t) = 2t^{-1/2} + 2 = \frac{2}{\sqrt{t}} + 2$. Evaluamos $t = 9$: $H'(9) = \frac{2}{\sqrt{9}} + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$. **Respuesta:** Crece a 2,67 m/año.

PROFE TEO

La derivada de la altura $h(t)$ te da la velocidad de un objeto. Si lanzas un balón hacia arriba, en el punto más alto su velocidad es cero, ¡es decir, $h'(t) = 0$!

Aplicación 5: Fuerza Magnética Revertida

Contexto: Un levitador cuántico acumula energía repulsiva de campo marcando $E(r) = \frac{8}{r^2} - 2r$ Joules. Halle la tasa de cambio electromagnético cuando la distancia radial compresiva se acorta a exactamente dos milímetros.
Solución: Reescribimos: $E(r) = 8r^{-2} - 2r$. Derivamos: $E'(r) = -16r^{-3} - 2 = -\frac{16}{r^3} - 2$. Evaluamos $r = 2$: $E'(2) = -\frac{16}{8} - 2 = -2 - 2 = -4$. **Respuesta:** Pierde energía a -4 J/mm.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Argumente lógicamente por qué la derivada de cualquier función lineal $f(x) = mx + b$ resulta siempre en la constante m. ¿Qué significado geométrico tiene esto?

2. Un compañero deriva la expresión $\frac{1}{x^2}$ moviendo la variable hacia el numerador y afirmando que el resultado es $2x^{-1}$. Explique y corrija este grave error algebraico.

3. Describa por qué la regla de la potencia $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ no es aplicable para derivar la función exponencial $f(x) = 2^x$.

4. Si la función derivada de la posición de una partícula representa su velocidad $v(t)$, ¿qué representa físicamente la derivada de esa velocidad, $v'(t)$?

5. Analice la función $f(x) = \pi^5$. ¿Por qué su derivada es exactamente cero y no $5\pi^4$?

6. Si evaluamos la derivada de $f(x) = |x|$ mediante reglas de potencias escribiéndolo como $(x^2)^{1/2}$, ¿qué problema analítico encontramos en el vértice $x = 0$?

7. En economía, si el costo marginal se vuelve negativo, ¿qué implicación gerencial tiene sobre el proceso de fabricación en serie?

8. Demuestre por qué es matemáticamente inválido derivar la fracción $\frac{x^2+3x}{x+1}$ dividiendo término a término y usando reglas de potencias directas.

9. Si la recta tangente a una curva en el punto P es perfectamente horizontal, ¿qué información valiosa nos proporciona $f'(x)$ en dicho punto crítico?

10. Describa la conveniencia algebraica de expandir polinomios como $(x-2)^3$ antes de intentar calcular su derivada sin utilizar la Regla de la Cadena.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule la derivada de la función $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 8x - 12$.

Guía de Solución Interactiva

1. Aplicamos la regla de potencias al primer término: $6(\_\_\_\_\_x^{\_\_\_\_}) = \_\_\_\_\_x^2$.
2. Derivamos el segundo y tercer término respectivamente: $-\_\_\_\_\_x + \_\_\_\_\_$.
3. La derivada de la constante 12 es _____.
4. Agrupando, $f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

Problema 2. Halle y' para $y = \frac{5}{x^2} + 3\sqrt{x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Reescribimos los exponentes a forma algebraica: $y = 5x^{\_\_\_\_} + 3x^{\_\_\_\_}$.
2. Aplicamos la regla bajando los exponentes: $y' = 5(\_\_\_\_\_)x^{-3} + 3(\_\_\_\_\_)x^{-1/2}$.
3. Simplificamos devolviendo a forma racional/radical: $y' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

Problema 3. Determine la derivada de $h(t) = \frac{t^4 - 2t + 1}{\sqrt{t}}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Reescribimos el denominador como $t^{\_\_\_\_}$.
2. Dividimos cada término del numerador: $h(t) = t^{\_\_\_\_} - 2t^{\_\_\_\_} + t^{\_\_\_\_}$.
3. Derivamos cada uno individualmente: $h'(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

PROFE TEO

Cuando tengas una suma de fracciones algebraicas con el mismo denominador monomio, divídelas todas antes de derivar. ¡Te salvará minutos valiosos!

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Derive $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - 3x^4 + x$.

Problema 5. Halle la derivada de $y = (x^2 + 1)(x - 2)$ expandiendo primero.

Problema 6. Calcule $g'(x)$ para $g(x) = \frac{8}{x^3} - \frac{2}{x}$.

Problema 7. Determine $\frac{dy}{dx}$ si $y = x^{4/3} - x^{2/3}$.

Problema 8. Derive $f(x) = 2x^e + e^x$ (Tenga cuidado con la base constante).

Problema 9. Encuentre la pendiente de la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ en $x = 2$.

Problema 10. Derive $h(x) = \frac{\sqrt{x}+x}{x^2}$.

Problema 11. Halle el punto donde la gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ tiene tangente horizontal.

Problema 12. Calcule la segunda derivada $f''(x)$ de la función $f(x) = 4x^5 - 2x^3$.

Problema 13. Derive la función $y = \pi^2 x^3 - \sqrt{3}x + 10$.

Problema 14. Expanda y derive $f(t) = (2t-1)^2$.

Problema 15. Determine $\frac{dy}{dx}$ para $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}$.

Problema 16. Halle los puntos en $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ con tangente horizontal.

Problema 17. Derive $f(w) = w(w-2)(w+2)$.

Problema 18. Calcule la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 1$ en $x = 1$.

Problema 19. Determine la derivada de $y = \frac{x^e + e^2}{\pi^x}$. ¡Cuidado! Es un reto teórico. (Asuma derivadas exponenciales básicas).

Problema 20. Halle el valor de k si la recta tangente a $y = kx^2$ en $x = 2$ tiene pendiente 12.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un cañón electromagnético expulsa munición de tungsteno con trayectoria lineal de $s(t) = 80t^2 - 5t^3$ metros. Encuentre la aceleración física exacta generada sobre el metal al marcarse dos segundos cronometrados de vuelo.

Guía de Solución Interactiva

1. Hallamos velocidad derivando la posición: $v(t) = s'(t) =$ __________. 2. Hallamos aceleración derivando la velocidad: $a(t) = v'(t) =$ __________. 3. Evaluamos en $t = 2$: $a(2) = 160 - 30(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$ m/s^2.

Problema 2. El índice de toxicidad por polímeros disueltos en un afluente subterráneo drena toxinas según $T(h) = \frac{500}{\sqrt{h}}$. Detalle matemáticamente la tasa de purificación biológica lograda al cuarto día de filtrado activo ininterrumpido.

Guía de Solución Interactiva

1. Expresamos el modelo en exponentes: $T(h) = 500h^{\_\_\_\_\_}$. 2. Derivamos la función tóxica: $T'(h) = \_\_\_\_\_ h^{-3/2} = -\frac{250}{\sqrt{h^3}}$. 3. Evaluando la pureza a $h = 4$: $-\frac{250}{\sqrt{64}} = \_\_\_\_\_$ unidades/día.

Problema 3. Un telescopio orbital despliega sus paneles captadores ganando superficie solar calculada por $A(t) = t^3 - 6t^2 + 12t$ metros cuadrados. Calcule en qué minuto de rotación el sistema detiene completamente su expansión mecánica desplegable.

Guía de Solución Interactiva

1. La expansión se detiene si $A'(t) =$ _____. 2. Calculamos la derivada panel: $A'(t) =$ __________. 3. Igualamos a cero y resolvemos la cuadrática: $t =$ ________ minutos.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La degradación criogénica del blindaje cerámico en un reactor de fisión termonuclear obedece a $D(x) = 5x^4 - 2x^2$ milímetros. Especifique el índice marginal de desgaste abrasivo soportado en la tercera iteración de impacto.

Problema 5. Un ascensor minero neumático baja por la veta extrayendo pirita con elevación $E(t) = 1000 - 4t^2$. Precise la velocidad instantánea de inmersión subterránea que marca la cabina al quinto segundo de operación constante.

Problema 6. La latencia de datos procesados en la intranet satelital sufre interferencias cósmicas midiendo $L(p) = \frac{100}{p^2}$ microsegundos. Cuantifique la tasa de recuperación de ping alcanzada transmitiendo el paquete de conexión diez de forma exitosa.

Problema 7. El diámetro del foco incandescente de un láser de corte metálico de diodos se dilata con $F(d) = 2\sqrt{d} + d$. Calibre el cabezal óptico calculando la velocidad de enfoque cruzando el milímetro noveno.

Problema 8. Una plaga de roya biológica consume el follaje de cafetales andinos devorando biomasa por $B(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$. Determine matemáticamente en qué día biológico la tasa de devastación fungicida detiene su avance.

Problema 9. El voltaje acumulado de un banco de capacitores de grafeno carga energía mediante $V(c) = 5c^{4/3}$ voltios. Identifique la tasa de inyección eléctrica marginal experimentada en el ciclo computacional de recarga número ocho.

Problema 10. La masa del casquete glaciar ártico se derrite fragmentando bloques según $M(a) = \frac{1000}{\sqrt[3]{a}}$. Pronostique el índice de pérdida milimétrica instantánea de nivel hídrico congelado padecida al cumplirse el octavo año de deshielo térmico.

Problema 11. Un tren bala superconductor frena inercialmente mediante bobinas magnéticas describiendo posición $P(s) = 500s - 2s^3$. Compruebe en qué segundo físico exacto el convoy frena completamente su avance quedando inmovilizado en el andén principal.

Problema 12. La viscosidad dinámica de resina epóxica endurece perdiendo fluidez de moldeado $V(t) = 50t - 0{,}1t^4$. Precise la aceleración de endurecimiento catalítico registrada en el rodillo mecánico amasador al segundo dos del compuesto industrial.

Problema 13. La rentabilidad de minado de una granja de criptomonedas oscila por dificultad de bloque dictando $R(h) = 100\sqrt{h} - h^2$. Determine el declive financiero marginal sufrido conectando el cuarto clúster asic de tarjetas gráficas operativas.

Problema 14. El ángulo de giro transversal de un brazo retroexcavador de perforación acata $\theta(t) = t^3 - 12t$. Evalúe la fuerza de torsión nula ubicando los segundos donde el mecanismo inversor de giro invierte su avance.

Problema 15. Las aspas de un aerogenerador nórdico atrapan viento incrementando revoluciones por $R(v) = (v - 2)^2$. Cuantifique la tasa instantánea de rotación eólica cinética alcanzada enfrentando ráfagas continuas de fuerza seis metros por segundo exactos.

Problema 16. Una antena de radioastronomía pivota corrigiendo acimut orbital describiendo $A(t) = \frac{t^4-16}{t^2}$. Confirme la rapidez de escaneo azimutal estelar experimentada por el hardware apuntador en el preciso momento del cuarto milisegundo sideral astrométrico.

Problema 17. La fricción térmica producida en el tren de aterrizaje de un caza bombardero sube $F(x) = 3x^2 + 5x^{-1}$. Valide analíticamente la tasa de calentamiento friccional instantáneo quemando neumáticos en el metro dos asfáltico militar.

Problema 18. Un nodo cuántico computacional entrelaza qubits procesando estados de superposición $Q(c) = c\sqrt{c}$. Asegure matemáticamente la tasa de coherencia algorítmica procesando clústeres en la novena iteración probabilística binaria.

Problema 19. La presión hidrostática de contención en el tabique de una esclusa portuaria marítima escala $P(h) = (h^2 + 1)(h - 3)$. Pronostique el estrés de deformación fluviométrica instantáneo al rebasar el nivel hídrico marcador dos metros métricos absolutos.

Problema 20. La intensidad fotónica de iluminación biológica irradiada sobre un cultivo algario marino dicta $I(l) = 4l^3 - 6l^2$. Precise los intervalos lumínicos exactos donde el luxómetro digital estabiliza y frena su curva de radiación artificial.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $18x^2 - 8x + 8$.
2. $-\frac{10}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$.
3. $\frac{7}{2}t^{5/2} - t^{-1/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2}$.
4. $3x^5 - 12x^3 + 1$.
5. $3x^2 - 4x + 1$.
6. $-24x^{-4} + 2x^{-2}$.
7. $\frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{2}{3}x^{-1/3}$.
8. $2ex^{e-1} + e^x$.
9. $m = 8$.
10. $-\frac{3}{2}x^{-5/2} - x^{-2}$.
11. $x = 3 \implies (3, -4)$.
12. $80x^3 - 12x$.
13. $3\pi^2 x^2 - \sqrt{3}$.
14. $8t - 4$.
15. $\frac{3}{4}x^{-1/4} - 2x^{-7/5}$.
16. $x = 1, x = -3$.
17. $3w^2 - 4$.
18. $y = 2x$.
19. (Reto con reglas exp).
20. $k = 3$.

Propuestos de Aplicación

1. 100 m/s^2 (Aceleración).
2. $-31{,}25$ u/día.
3. Minuto 2 ($A'(2) = 0$).
4. 528 mm/iteración.
5. -40 m/s.
6. $-0{,}2$ μs/paquete.
7. 1,33 mm/s.
8. Días $t = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.
9. 13,33 V/ciclo.
10. $-10{,}42$ mm/año.
11. $s = 9{,}12$ seg.
12. $-4{,}8$ m/s^2 (Aceleración $V''(2)$).
13. 17 unidades/clúster.
14. Segundos $t = \pm 2$.
15. 8 RPM/viento.
16. 8,25 rad/s.
17. 10,75 unidades/m.
18. 4,5 qubits/ciclo.
19. 3 kPa/m.
20. $l = 0$ y $l = 1$.

¡El Motor del Cálculo!

'No necesitas analizar la vida midiendo cada milisegundo desde cero. Existen patrones, reglas y atajos que, cuando los dominas, te permiten procesar la complejidad del universo en un parpadeo.'

- La eficacia del álgebra aplicada

¡Excelente trabajo! Ahora posees las herramientas rápidas para encontrar velocidades, aceleraciones y picos en cualquier sistema matemático.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com