

PRECÁLCULO

RADICALES Y EXPONENTES

CUADERNO DE TRABAJO
Simplificación y Racionalización

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Radicales y Exponentes Fraccionarios

Los radicales y los exponentes fraccionarios son dos formas de escribir exactamente la misma idea matemática. Dominar su manipulación y simplificación es el puente directo hacia el cálculo diferencial e integral.

Un exponente racional se define como: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$, donde $n > 0$. Para simplificar radicales, extraemos la mayor potencia perfecta posible del radicando: $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \sqrt[n]{b}$ (asumiendo $a \geq 0$ si n es par).

Advertencia Importante: Si n es par y trabajamos en los números reales, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$. ¡Nunca olviden el valor absoluto en índices pares!

Racionalizar consiste en reescribir una fracción para que no haya radicales en el denominador.

- **Denominador simple** ($\sqrt[n]{x^m}$): Multiplicamos numerador y denominador por el factor que complete la potencia perfecta en la raíz: $\sqrt[n]{x^{n-m}}$.
- **Denominador binomio** ($\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$): Utilizamos el **conjugado**. Si tenemos $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, multiplicamos arriba y abajo por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ para aprovechar la diferencia de cuadrados: $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

Consejo: ¡Cuidado con los signos! Siempre agrupen con paréntesis antes de multiplicar conjugados para no perder términos.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Simplificación Radical

Enunciado: Simplifique completamente la expresión $\sqrt[3]{54x^5y^7}$.

Solución: Descomponemos en factores que sean cubos perfectos.

$54 = 27 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2$. Para las variables: $x^5 = x^3 \cdot x^2$ y $y^7 = y^6 \cdot y$.

Reescribimos: $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^6 \cdot y}$.

Extraemos los cubos perfectos ($3, x, y^2$):

$3xy^2 \sqrt[3]{2x^2y}$.

....>

COMENTARIO

¡Hola a todos! Traten a las raíces como exponentes fraccionarios. Les prometo que simplifica la vida entera al aplicar las leyes de exponentes que ya conocen.

....>

COMENTARIO

El conjugado es mágico. Es el equivalente algebraico de usar una palanca para destruir las raíces del denominador de un solo golpe.

....>

COMENTARIO

La clave aquí es dividir el exponente de adentro entre el índice de la raíz. El cociente sale, el residuo se queda adentro.

Problema Resuelto 2: Operaciones con Radicales Semejantes

Enunciado: Reduzca la expresión $2\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + \sqrt{48}$.

Solución: Simplificamos cada radical buscando cuadrados perfectos.

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Sustituimos: } 2(5\sqrt{3}) - 3(2\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3}.$$

Como son radicales semejantes, sumamos coeficientes: $8\sqrt{3}$.

Problema Resuelto 3: Racionalización Simple Avanzada

Enunciado: Racionalice el denominador de $\frac{5x}{\sqrt[4]{8x^3y^2}}$.

Solución: El denominador es $\sqrt[4]{2^3x^3y^2}$.

Para eliminar la raíz cuarta, necesitamos exponentes de 4. Faltan: un 2^1 , un x^1 y un y^2 .

Multiplicamos arriba y abajo por $\sqrt[4]{2xy^2}$:

$$\frac{5x \cdot \sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{2^3x^3y^2} \cdot \sqrt[4]{2xy^2}} = \frac{5x \sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{2^4x^4y^4}} = \frac{5x \sqrt[4]{2xy^2}}{2xy}.$$

Simplificamos la x : $\frac{5 \sqrt[4]{2xy^2}}{2y}$.

Problema Resuelto 4: Racionalización por Conjugado

Enunciado: Racionalice $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Solución: Multiplicamos por el conjugado del denominador: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

$$\text{Numerador: } (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

$$\text{Denominador: } (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1.$$

$$\text{Resultado: } 3 - \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Problema Resuelto 5: Exponentes Fraccionarios Complejos

Enunciado: Simplifique $\left(\frac{x^{-2/3}y^{1/2}}{x^{1/3}y^{-3/2}}\right)^{-1/2}$.

Solución: Primero simplificamos el interior restando exponentes:

$$\text{Para } x: -2/3 - 1/3 = -3/3 = -1.$$

$$\text{Para } y: 1/2 - (-3/2) = 4/2 = 2.$$

La expresión interior es $x^{-1}y^2$.

$$\text{Ahora aplicamos el exponente exterior: } (x^{-1}y^2)^{-1/2} = x^{1/2}y^{-1}.$$

Pasando a forma radical y exponente positivo: $\frac{\sqrt{x}}{y}$.

....▷

COMENTARIO

Nunca multipliquen ciegamente por la misma raíz si el índice es mayor a 2. Siempre calculen "lo que le falta" para llegar al índice.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Física (Péndulo)

Contexto: El periodo de un péndulo es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Si $L = 9,8\text{m}$ y $g = 9,8\text{m/s}^2$, ¿cuánto dura una oscilación completa?

Solución: Sustituimos los valores en la fórmula: $T = 2\pi\sqrt{9,8/9,8}$.

Simplificamos el interior de la raíz: $T = 2\pi\sqrt{1} = 2\pi$.

Dura exactamente 2π segundos (aprox. 6.28 s).

Aplicación 2: Diseño (Escalado de Pasteles)

Contexto: En *misdulcecitos.com*, el radio de un pastel esférico en función de su volumen es $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Si el volumen se multiplica por 8, ¿cómo cambia el radio?

Solución: El nuevo radio es $R_{nuevo} = \sqrt[3]{\frac{3(8V)}{4\pi}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Como $\sqrt[3]{8} = 2$, tenemos $R_{nuevo} = 2R$. El radio se duplica.

Aplicación 3: Geometría Espacial

Contexto: La diagonal de un prisma rectangular es $D = \sqrt{l^2 + w^2 + h^2}$. Halle la diagonal exacta de una caja con dimensiones 3cm, 4cm y 5cm.

Solución: Evaluamos: $D = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25}$.

$D = \sqrt{50}$. Simplificando la raíz: $\sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ cm.

Aplicación 4: Medicina (Superficie Corporal)

Contexto: La fórmula de Mosteller para el área de superficie corporal es $BSA = \sqrt{\frac{H \cdot W}{3600}}$. Si un paciente mide 160cm y pesa 90kg, calcule su BSA exacto simplificado.

Solución: $BSA = \sqrt{\frac{160 \cdot 90}{3600}} = \sqrt{\frac{14400}{3600}} = \sqrt{4} = 2$.

El área de superficie corporal es de 2m^2 .

Aplicación 5: Ingeniería de Tránsito

Contexto: La velocidad máxima de giro seguro en una curva peraltada es $v = \sqrt{g \cdot R \cdot \mu}$. Si $g = 10$, $R = 200$ y $\mu = 0,5$, halle v .

Solución: Sustituimos: $v = \sqrt{10 \cdot 200 \cdot 0,5} = \sqrt{2000 \cdot 0,5} = \sqrt{1000}$.

Simplificando el radical: $\sqrt{100 \cdot 10} = 10\sqrt{10}$ m/s.

....▷

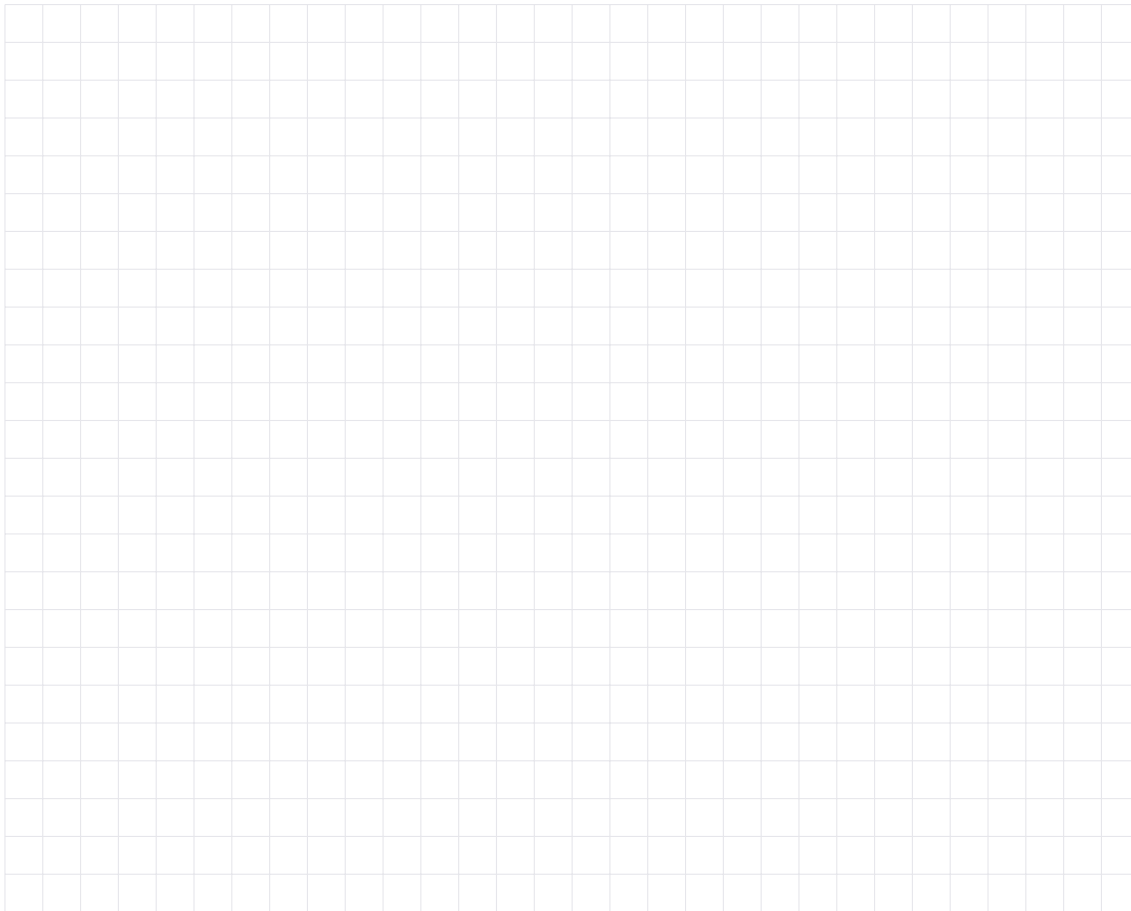
COMENTARIO

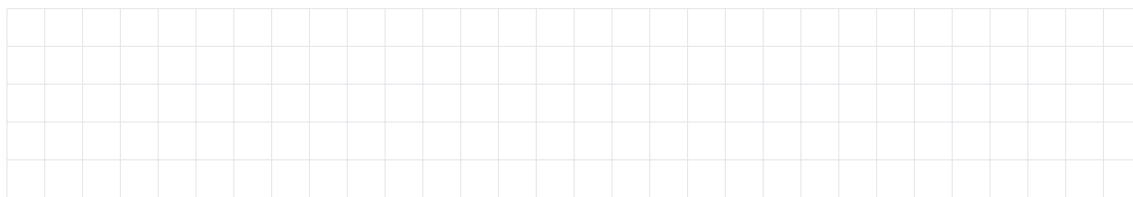
Las raíces cuadradas dominan las fórmulas físicas. Racionalizar las unidades es tan vital como los números.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

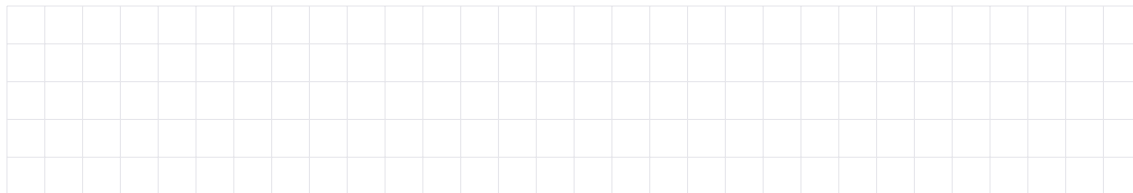
Responde a las siguientes preguntas conceptuales argumentando matemáticamente.

1. ¿Por qué la afirmación $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$ es un error matemático grave? Justifique con un contraejemplo numérico.
2. Explique la diferencia fundamental en el dominio real entre las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$.
3. Al simplificar $\sqrt{x^6}$, el resultado correcto es $|x^3|$ y no simplemente x^3 . ¿Por qué es necesario el valor absoluto aquí pero no en $\sqrt{x^4} = x^2$?
4. ¿Qué ventaja operativa y estética tiene escribir $\frac{1}{\sqrt{2}}$ como $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en un desarrollo largo de álgebra?
5. Si multiplicamos el numerador y denominador de una fracción por el conjugado, ¿por qué el valor general de la fracción no cambia?
6. Analice la expresión $a^{m/n}$. ¿En qué condiciones matemáticas estrictas podemos afirmar que $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$?
7. ¿Es posible racionalizar un numerador en lugar de un denominador? ¿En qué contexto del cálculo diferencial podría ser esto útil?
8. Demuestre usando propiedades algebraicas que las raíces de índice par de números negativos no pueden existir en los números reales.
9. Si se tiene la expresión $\sqrt[4]{a^2}$, ¿es correcto simplificarla directamente a \sqrt{a} para cualquier número real a ? Justifique.
10. ¿Por qué no existe el concepto de "conjugado" de la misma manera para una suma de raíces cúbicas como $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$? ¿Qué producto notable deberíamos usar?

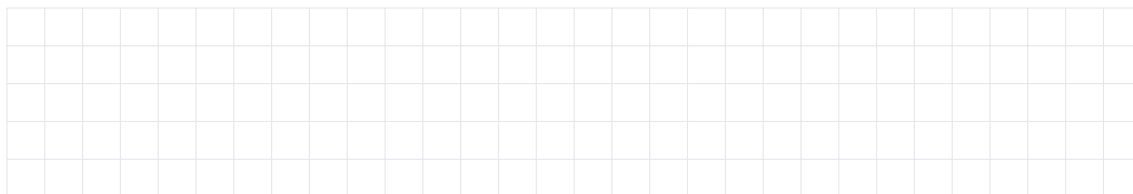




Problema 19. La energía cinética relativista involucra $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Factorice el término c^2 y simplifique el radical para extraerlo.



Problema 20. La eficiencia térmica de un motor Carnot es $1 - \frac{T_c}{T_h}$. Si igualamos esto a un sistema de áreas cuadradas $1 - \sqrt{\frac{A_c}{A_h}}$, despeje A_c .



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $6x^2y^3\sqrt{2x}$
2. $\frac{5\sqrt[3]{2x}}{x}$
3. $\sqrt{7} + \sqrt{3}$
4. $4a^2b\sqrt[3]{2ab}$
5. $11\sqrt{5}$
6. $2\sqrt{3x}$
7. $x^{2/3}$
8. $9 + 4\sqrt{5}$
9. $10 + 5\sqrt{6}$
10. $x^{1/8}$
11. $\sqrt{x} + 3$
12. $\sqrt{5} + \sqrt{2}$
13. $\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$
14. $73/9$
15. $4\sqrt[4]{3}$
16. \sqrt{x}
17. $\frac{2(a+b)}{a-b}$
18. $\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x-y}$
19. Verdadero. Definición de valor absoluto.
20. $x = 5$ o $x = 8$ (Verificar: $x = 5$ es la solución real principal, $x = 8$ es otra raíz).

Propuestos de Aplicación

1. Factor de 2
2. $h = \frac{gt^2}{2}$
3. $c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
4. 200 m/s
5. $1/r$
6. Factor de 8 ($4^{3/2}$)
7. 340 m
8. 2 cm
9. $\frac{v\sqrt{\gamma RT}}{\gamma RT}$
10. 26 km
11. $x = 5$ m
12. 0,414 o 41,4 %
13. $\frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2} \cdot c$
14. $L = 2$ m
15. $\frac{\sqrt{\epsilon + \sqrt{\mu}}}{\epsilon - \mu}$
16. $D = 4\sqrt{cd}$
17. No. El incremento es por factor de $\sqrt{2} \approx 1,41$.
18. $r = 1$ (100 % de crecimiento).
19. $c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$
20. $A_c = A_h \left(\frac{T_c}{T_h}\right)^2$



¡Llegaste al Final!

'Las raíces no solo anclan los árboles a la tierra, también aseguran tu éxito en el cálculo superior. Domínalas y crecerás sin límites.'

- Tu futuro matemático

¡Sigue simplificando problemas, término a término!
El nivel superior te espera.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com