PRECÁLCULO

RADICALES Y EXPONENTES

CUADERNO DE TRABAJO

Simplificación y Racionalización

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Radicales y Exponentes Fraccionarios

Los radicales y los exponentes fraccionarios son dos formas de escribir exactamente la misma idea matemática. Dominar su manipulación y simplificación es el puente directo hacia el cálculo diferencial e integral.

Un exponente racional se define como: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$, donde $n > 0$. Para simplificar radicales, extraemos la mayor potencia perfecta posible del radicando: $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b}$ (asumiendo $a \geq 0$ si n es par).

Advertencia Importante: Si n es par y trabajamos en los números reales, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$. ¡Nunca olviden el valor absoluto en índices pares!

COMENTARIO

¡Hola a todos! Traten a las raíces como exponentes fraccionarios. Les prometo que simplifica la vida entera al aplicar las leyes de exponentes que ya conocen.

Racionalizar consiste en reescribir una fracción para que no haya radicales en el denominador.

- **Denominador simple ($\sqrt[n]{x^m}$):** Multiplicamos numerador y denominador por el factor que complete la potencia perfecta en la raíz: $\sqrt[n]{x^{n-m}}$.
- **Denominador binomio ($\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$):** Utilizamos el **conjugado**. Si tenemos $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, multiplicamos arriba y abajo por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ para aprovechar la diferencia de cuadrados: $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

Consejo: ¡Cuidado con los signos! Siempre agrupen con paréntesis antes de multiplicar conjugados para no perder términos.

COMENTARIO

El conjugado es mágico. Es el equivalente algebraico de usar una palanca para destruir las raíces del denominador de un solo golpe.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Simplificación Radical

Enunciado: Simplifique completamente la expresión $\sqrt[3]{54x^5y^7}$.
Solución: Descomponemos en factores que sean cubos perfectos.
$54 = 27 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2$. Para las variables: $x^5 = x^3 \cdot x^2$ y $y^7 = y^6 \cdot y$.
Reescribimos: $\sqrt[3]{3^3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^6 \cdot y}$.
Extraemos los cubos perfectos (3, x, y y^2):
$3xy^2\sqrt[3]{2x^2y}$.

COMENTARIO

La clave aquí es dividir el exponente de adentro entre el índice de la raíz. El cociente sale, el residuo se queda adentro.

Problema Resuelto 2: Operaciones con Radicales Semejantes

Enunciado: Reduzca la expresión $2\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + \sqrt{48}$.
Solución: Simplificamos cada radical buscando cuadrados perfectos.
$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$.
$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.
$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$.
Sustituimos: $2(5\sqrt{3}) - 3(2\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$.
Como son radicales semejantes, sumamos coeficientes: $8\sqrt{3}$.

Problema Resuelto 3: Racionalización Simple Avanzada

Enunciado: Racionalice el denominador de $\frac{5x}{\sqrt[4]{8x^3y^2}}$.
Solución: El denominador es $\sqrt[4]{2^3x^3y^2}$.
Para eliminar la raíz cuarta, necesitamos exponentes de 4. Faltan: un 2^1, un x^1 y un y^2.
Multiplicamos arriba y abajo por $\sqrt[4]{2xy^2}$:
$\frac{5x \cdot \sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{2^3x^3y^2} \cdot \sqrt[4]{2xy^2}} = \frac{5x\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{2^4x^4y^4}} = \frac{5x\sqrt[4]{2xy^2}}{2xy}$.
Simplificamos la x: $\frac{5\sqrt[4]{2xy^2}}{2y}$.

Problema Resuelto 4: Racionalización por Conjugado

Enunciado: Racionalice $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.
Solución: Multiplicamos por el conjugado del denominador: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.
Numerador: $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
Denominador: $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$.
Resultado: $3 - \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

COMENTARIO
Nunca multipliquen ciegamente por la misma raíz si el índice es mayor a 2. Siempre calculen "lo que le falta"para llegar al índice.

Problema Resuelto 5: Exponentes Fraccionarios Complejos

Enunciado: Simplifique $\left(\frac{x^{-2/3}y^{1/2}}{x^{1/3}y^{-3/2}}\right)^{-1/2}$.
Solución: Primero simplificamos el interior restando exponentes:
Para x: $-2/3 - 1/3 = -3/3 = -1$.
Para y: $1/2 - (-3/2) = 4/2 = 2$.
La expresión interior es $x^{-1}y^2$.
Ahora aplicamos el exponente exterior: $(x^{-1}y^2)^{-1/2} = x^{1/2}y^{-1}$.
Pasando a forma radical y exponente positivo: $\frac{\sqrt{x}}{y}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Física (Péndulo)

Contexto: El periodo de un péndulo es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Si $L = 9{,}8$m y $g = 9{,}8$m/s^2, ¿cuánto dura una oscilación completa?
Solución: Sustituimos los valores en la fórmula: $T = 2\pi\sqrt{9{,}8/9{,}8}$.
Simplificamos el interior de la raíz: $T = 2\pi\sqrt{1} = 2\pi$.
Dura exactamente 2π segundos (aprox. 6.28 s).

COMENTARIO
Las raíces cuadradas dominan las fórmulas físicas. Racionalizar las unidades es tan vital como los números.

Aplicación 2: Diseño (Escalado de Pasteles)

Contexto: En *misdulcecitos.com*, el radio de un pastel esférico en función de su volumen es $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Si el volumen se multiplica por 8, ¿cómo cambia el radio?
Solución: El nuevo radio es $R_{nuevo} = \sqrt[3]{\frac{3(8V)}{4\pi}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.
Como $\sqrt[3]{8} = 2$, tenemos $R_{nuevo} = 2R$. El radio se duplica.

Aplicación 3: Geometría Espacial

Contexto: La diagonal de un prisma rectangular es $D = \sqrt{l^2 + w^2 + h^2}$. Halle la diagonal exacta de una caja con dimensiones 3cm, 4cm y 5cm.
Solución: Evaluamos: $D = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25}$.
$D = \sqrt{50}$. Simplificando la raíz: $\sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ cm.

Aplicación 4: Medicina (Superficie Corporal)

Contexto: La fórmula de Mosteller para el área de superficie corporal es $BSA = \sqrt{\frac{H \cdot W}{3600}}$. Si un paciente mide 160cm y pesa 90kg, calcule su BSA exacto simplificado.
Solución: $BSA = \sqrt{\frac{160 \cdot 90}{3600}} = \sqrt{\frac{14400}{3600}} = \sqrt{4} = 2$.
El área de superficie corporal es de 2m^2.

Aplicación 5: Ingeniería de Tránsito

Contexto: La velocidad máxima de giro seguro en una curva peraltada es $v = \sqrt{g \cdot R \cdot \mu}$. Si $g = 10$, $R = 200$ y $\mu = 0{,}5$, halle v.
Solución: Sustituimos: $v = \sqrt{10 \cdot 200 \cdot 0{,}5} = \sqrt{2000 \cdot 0{,}5} = \sqrt{1000}$.
Simplificando el radical: $\sqrt{100 \cdot 10} = 10\sqrt{10}$ m/s.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responde a las siguientes preguntas conceptuales argumentando matemáticamente.

1. ¿Por qué la afirmación $\sqrt{x^2+y^2} = x+y$ es un error matemático grave? Justifique con un contraejemplo numérico.

2. Explique la diferencia fundamental en el dominio real entre las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$.

3. Al simplificar $\sqrt{x^6}$, el resultado correcto es $|x^3|$ y no simplemente x^3. ¿Por qué es necesario el valor absoluto aquí pero no en $\sqrt{x^4} = x^2$?

4. ¿Qué ventaja operativa y estética tiene escribir $\frac{1}{\sqrt{2}}$ como $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en un desarrollo largo de álgebra?

5. Si multiplicamos el numerador y denominador de una fracción por el conjugado, ¿por qué el valor general de la fracción no cambia?

6. Analice la expresión $a^{m/n}$. ¿En qué condiciones matemáticas estrictas podemos afirmar que $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$?

7. ¿Es posible racionalizar un numerador en lugar de un denominador? ¿En qué contexto del cálculo diferencial podría ser esto útil?

8. Demuestre usando propiedades algebraicas que las raíces de índice par de números negativos no pueden existir en los números reales.

9. Si se tiene la expresión $\sqrt[4]{a^2}$, ¿es correcto simplificarla directamente a $\sqrt{a}$ para cualquier número real a? Justifique.

10. ¿Por qué no existe el concepto de çonjugado"de la misma manera para una suma de raíces cúbicas como $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$? ¿Qué producto notable deberíamos usar?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Simplifique completamente: $\sqrt{72x^5y^6}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Separa el coeficiente numérico en un cuadrado perfecto por otro número:
$72 = 36 \cdot$ __________

2. Separa las variables en potencias pares (que tienen raíz exacta):
$x^5 = x^4 \cdot$ _____ y y^6 ya es potencia par.

3. Extrae la raíz cuadrada de las partes perfectas y deja el resto adentro:
__________$\sqrt{2x}$

Problema 2. Racionalice el denominador: $\frac{10}{\sqrt[3]{4x^2}}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Analiza el denominador: $\sqrt[3]{2^2x^2}$. Faltan potencias para llegar a índice 3.
Multiplica por $\sqrt[3]{2\_\_x\_\_}$.

2. Multiplica numerador y denominador por el factor encontrado:
Numerador: $10\sqrt[3]{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$
Denominador: $\sqrt[3]{2^3x^3} =$ __________

3. Simplifica la fracción final con el numerador:
Respuesta: _______________

Problema 3. Racionalice el denominador conjugado: $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica el conjugado del denominador:
Conjugado = ______________

2. Multiplica arriba y abajo. El denominador será diferencia de cuadrados:
$(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 =$ __________

3. Divide el numerador entre el resultado del paso 2:
Respuesta: ______________

····▷ COMENTARIO

El error clásico es tachar cosas dentro de la raíz con cosas fuera de ella. ¡Las raíces son un escudo! Solo sale o entra si ajustas la potencia.

Problemas Generales

Problema 4. Simplifique asumiendo variables positivas: $\sqrt[3]{128a^7b^4}$.

Problema 5. Reduzca términos semejantes: $3\sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{80}$.

Problema 6. Racionalice: $\frac{6x}{\sqrt{3x}}$.

Problema 7. Simplifique expresando como potencia fraccionaria: $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$.

Problema 8. Racionalice el denominador: $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$.

Problema 9. Efectúe la multiplicación: $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(3\sqrt{3}+4\sqrt{2})$.

Problema 10. Simplifique usando exponentes fraccionarios: $\frac{x^{3/4}\cdot x^{-1/2}}{x^{1/8}}$.

Problema 11. Racionalice: $\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Problema 12. Simplifique la raíz anidada: $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$. (Pista: busque $\sqrt{a}+\sqrt{b}$).

Problema 13. Racionalice el numerador: $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

Problema 14. Halle el valor exacto de: $27^{-2/3}+16^{3/4}$.

Problema 15. Racionalice: $\frac{12}{\sqrt[4]{27}}$.

Problema 16. Reduzca a un solo radical: $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{x^{12}}}}$.

Problema 17. Simplifique la fracción combinada: $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Problema 18. Racionalice el denominador cúbico usando suma/diferencia de cubos: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$.

Problema 19. Determine la verdad matemática de: si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$.

Problema 20. Resuelva la ecuación radical: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4} = 3$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La frecuencia de una cuerda vibrante es $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Si la tensión T se cuadruplica, ¿qué factor multiplica a la frecuencia?

Guía de Solución Interactiva

1. Sustituye T por $4T$ en la fórmula:
$f_{nueva} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4T}{\mu}} = \frac{1}{2L}\sqrt{4 \cdot \_\_\_\_\_}$

2. Extrae la raíz cuadrada del 4:
$f_{nueva} = \_\_\_\_\_ \cdot \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

3. Compara con la f original para encontrar el factor:
Factor = __________

Problema 2. El tiempo en caer libremente es $t = \sqrt{2h/g}$. Despeje la altura h usando leyes de exponentes.

Guía de Solución Interactiva

1. Eleva toda la ecuación al cuadrado para eliminar la raíz:
$t^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

2. Multiplica ambos lados por g:
$g \cdot t^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

3. Divide entre 2 para despejar h:
$h = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Problema 3. El radio de un agujero negro es $R = \frac{2GM}{c^2}$. Si despejamos la velocidad de la luz c, quedará un radical. Escriba la fórmula de c.

Guía de Solución Interactiva

1. Multiplica en cruz para subir c^2:
$c^2 \cdot R =$ _______________

2. Divide entre R:
$c^2 =$ _______________

3. Aplica raíz cuadrada para despejar c:
$c =$ _______________

Problemas Generales

Problema 4. La velocidad de un tsunami en alta mar es $v = \sqrt{g \cdot d}$. Si la profundidad d es 4000m y $g = 10\text{m/s}^2$, halle v.

Problema 5. El nivel sonoro decae con la distancia r. Si la amplitud de onda de presión es proporcional a $1/\sqrt{r^2}$, simplifique la expresión asumiendo $r > 0$.

Problema 6. La Tercera Ley de Kepler es $T = k \cdot R^{3/2}$. Si la órbita R se aumenta por un factor de 4, ¿por cuánto se multiplica T?

Problema 7. En el diseño de un puente colgante, la longitud del cable es $L \approx a + \frac{8h^2}{3a}$. Halle el valor si $a = 300\text{m}$ y $h = \sqrt{4500}\text{m}$.

Problema 8. Para racionalizar costos, un empaque cilíndrico usa un radio $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$. Calcule r si el volumen es 16π cm^3.

Problema 9. En aerodinámica, el número de Mach es $M = \frac{v}{\sqrt{\gamma RT}}$. Racionalice el denominador de esta expresión simbólicamente.

Problema 10. La distancia al horizonte marino es $D \approx \sqrt{13h}$, con h en metros y D en km. Si la persona está en un acantilado de 52m, ¿a qué distancia está el horizonte?

Problema 11. Una torre de telecomunicaciones tiene tensores de longitud $L = \sqrt{x^2 + 144}$. Si se sabe que $L = 13$, halle la distancia a la base x.

Problema 12. La tasa de interés compuesto anual para duplicar una inversión en t años es $r = 2^{1/t} - 1$. Calcule r para $t = 2$ usando $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Problema 13. La dilatación del tiempo de Einstein incluye el factor $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Racionalice asumiendo que la raíz está definida.

Problema 14. El área de un hexágono regular de lado L es $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$. Si el área es $6\sqrt{3}$ m^2, calcule el lado exacto.

Problema 15. En óptica, el índice de refracción efectivo incluye sumas como $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}-\sqrt{\mu}}$. Racionalice su denominador.

Problema 16. Una antena parabólica tiene una profundidad $d = \frac{D^2}{16c}$. Despeje el diámetro D usando radicales.

Problema 17. La velocidad terminal de un paracaidista es $V = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}}$. Si la masa m se duplica, ¿el incremento de velocidad es el doble? Justifique numéricamente.

Problema 18. Al modelar la población de bacterias con crecimiento exponencial discreto, la tasa es $r = \left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{1/n} - 1$. Si $P_f = 8P_i$ y $n = 3$, halle r.

Problema 19. La energía cinética relativista involucra $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Factorice el término c^2 y simplifique el radical para extraerlo.

Problema 20. La eficiencia térmica de un motor Carnot es $1 - \frac{T_c}{T_h}$. Si igualamos esto a un sistema de áreas cuadradas $1 - \sqrt{\frac{A_c}{A_h}}$, despeje A_c.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $6x^2y^3\sqrt{2x}$
2. $\frac{5\sqrt[3]{2x}}{x}$
3. $\sqrt{7}+\sqrt{3}$
4. $4a^2b\sqrt[3]{2ab}$
5. $11\sqrt{5}$
6. $2\sqrt{3x}$
7. $x^{2/3}$
8. $9+4\sqrt{5}$
9. $10+5\sqrt{6}$
10. $x^{1/8}$
11. $\sqrt{x}+3$
12. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$
13. $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$
14. $73/9$
15. $4\sqrt[4]{3}$
16. $\sqrt{x}$
17. $\frac{2(a+b)}{a-b}$
18. $\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$
19. Verdadero. Definición de valor absoluto.
20. $x=5$ o $x=8$ (Verificar: $x=5$ es la solución real principal, $x=8$ es otra raíz).

Propuestos de Aplicación

1. Factor de 2
2. $h=\frac{gt^2}{2}$
3. $c=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$
4. 200 m/s
5. $1/r$
6. Factor de 8 ($4^{3/2}$)
7. 340 m
8. 2 cm
9. $\frac{v\sqrt{\gamma RT}}{\gamma RT}$
10. 26 km
11. $x=5$ m
12. 0,414 o 41,4 %
13. $\frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c^2-v^2}\cdot c$
14. $L=2$ m
15. $\frac{\sqrt{\epsilon}+\sqrt{\mu}}{\epsilon-\mu}$
16. $D=4\sqrt{cd}$
17. No. El incremento es por factor de $\sqrt{2}\approx 1{,}41$.
18. $r=1$ (100 % de crecimiento).
19. $c\sqrt{p^2+m^2c^2}$
20. $A_c=A_h\left(\frac{T_c}{T_h}\right)^2$

¡Llegaste al Final!

'Las raíces no solo anclan los árboles a la tierra, también aseguran tu éxito en el cálculo superior. Domínalas y crecerás sin límites.'

- Tu futuro matemático

¡Sigue simplificando problemas, término a término!
El nivel superior te espera.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com