$\log(AB)$

PRECÁLCULO

LOGARITMOS
PROPIEDADES

CUADERNO DE TRABAJO

Expansión, Compresión y Reglas Operativas

$n \ln(x)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Arte de Moldear Ecuaciones

Los logaritmos son traductores matemáticos. Su superpoder es convertir operaciones de un nivel superior (multiplicaciones, divisiones y potencias) en operaciones de un nivel más simple (sumas, restas y multiplicaciones).

1. Las Tres Reglas Fundamentales

Sea $a > 0, a \neq 1$, y sean $M, N > 0$.

1. **Regla del Producto:** Un producto en el argumento se separa en una suma de logaritmos.

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) + \log_a(N)$$

2. **Regla del Cociente:** Una división en el argumento se separa en una resta de logaritmos (el numerador suma, el denominador resta).

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$$

3. **Regla de la Potencia:** El exponente del argumento "baja.ª multiplicar al logaritmo completo.

$$\log_a(M^p) = p \cdot \log_a(M)$$

PROFE TEO

¡El error más común y mortal del examen! $\log(A+B)$ NO es igual a $\log A + \log B$. El logaritmo NO se distribuye sobre sumas o restas.

2. Expansión y Compresión

Usamos las propiedades en dos direcciones distintas dependiendo del objetivo:

- **Expansión:** Desarmar un logaritmo complejo en varios logaritmos simples. Es útil en cálculo diferencial (derivación logarítmica). Orden recomendado: Primero Cociente/Producto, al final Potencias.
- **Compresión:** Agrupar varios logaritmos que se suman/restan en un solo logaritmo. Es vital para resolver ecuaciones logarítmicas. Orden recomendado: Primero subir Potencias, luego juntar con Producto/Cociente.

PROFE TEO

Ojo con la Regla de la Potencia: En $\log(x^3)$, el 3 baja: $3\log(x)$. Pero en $(\log x)^3$, ¡el 3 NO puede bajar porque afecta a todo el logaritmo, no solo a la x!

$$\log\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right) \underset{\text{COMPRESIÓN}}{\overset{\text{EXPANSIÓN}}{\rightleftarrows}} 2\log x + 3\log y - 4\log z$$

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Expansión Básica

Enunciado: Expanda completamente la expresión $\ln\left(\frac{5x^4}{y^2}\right)$.

Solución: 1. Aplicamos Regla del Cociente (lo de arriba menos lo de abajo): $\ln(5x^4) - \ln(y^2)$
2. Aplicamos Regla del Producto al primer término: $\ln(5) + \ln(x^4) - \ln(y^2)$
3. Bajamos los exponentes (Regla de la Potencia): **Respuesta:** $\ln(5)+4\ln(x)-2\ln(y)$.

PROFE TEO
Las raíces son potencias fraccionarias ocultas. $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. ¡Conviértelas siempre antes de aplicar la regla de la potencia!

Problema Resuelto 2: Expansión con Radicales

Enunciado: Expanda $\log_3\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B^2}}\right)$.

Solución: Convertimos la raíz a exponente fraccionario: $\log_3\left(\left(\frac{A}{B^2}\right)^{1/3}\right)$. Bajamos el exponente global primero: $\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{A}{B^2}\right)$. Abrimos corchetes para el cociente: $\frac{1}{3}[\log_3(A) - \log_3(B^2)]$. Bajamos la potencia interna: **Respuesta:** $\frac{1}{3}\log_3(A) - \frac{2}{3}\log_3(B)$.

Problema Resuelto 3: Compresión Estándar

Enunciado: Escriba como un solo logaritmo: $\log(x) + 3\log(y) - \log(z)$.
Solución: 1. Subimos coeficientes como exponentes: $\log(x) + \log(y^3) - \log(z)$.
2. Juntamos la suma como producto: $\log(x \cdot y^3) - \log(z)$.
3. Juntamos la resta como cociente: **Respuesta:** $\log\left(\frac{xy^3}{z}\right)$.

Problema Resuelto 4: Compresión con Tramos Negativos

Enunciado: Comprima $2\ln(A) - \frac{1}{2}\ln(B) - 4\ln(C)$.
Solución: Subimos los coeficientes: $\ln(A^2) - \ln(B^{1/2}) - \ln(C^4)$. Truco Pro: Todo logaritmo que tenga un signo "menos.ªdelante, mandará su argumento al denominador. El que sea positivo va al numerador. **Respuesta:** $\ln\left(\frac{A^2}{\sqrt{B} \cdot C^4}\right)$.

Problema Resuelto 5: Evaluación Usando Propiedades

Enunciado: Sabiendo que $\log_a(2) = 0{,}3$ y $\log_a(3) = 0{,}47$, calcule el valor exacto de $\log_a(18)$.
Solución: Descomponemos el 18 en factores primos usando 2 y 3: $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$. Expresamos el logaritmo: $\log_a(2 \cdot 3^2)$. Expandimos usando propiedades: $\log_a(2) + 2\log_a(3)$. Reemplazamos los valores numéricos: $0{,}3 + 2(0{,}47) = 0{,}3 + 0{,}94$. **Respuesta:** $1{,}24$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Ingeniería Acústica

Contexto: La adición de dos fuentes sonoras requiere evaluar $D = 10\log(10^8 + 10^8)$. Use las propiedades para comprimir la expresión y encontrar los decibelios totales exactos de ambas maquinarias.

Solución: No podemos separar sumas, pero podemos factorizar el interior: $10^8 + 10^8 = 2(10^8)$. $D = 10\log(2 \cdot 10^8)$. Expandimos el producto: $D = 10[\log(2) + \log(10^8)] = 10[0{,}301 + 8] = 10(8{,}301)$. **Respuesta:** Emiten aproximadamente 83,01 decibelios.

Aplicación 2: Teoría de la Información

Contexto: Un canal digital procesa bits calculando la entropía como $H = -\log_2(p^3 \cdot q)$. Expanda analíticamente esta ecuación de red para aislar las probabilidades individuales de transmisión.

Solución: Aplicamos regla del producto dentro del argumento: $H = -[\log_2(p^3) + \log_2(q)]$. Bajamos el exponente: $H = -[3\log_2(p) + \log_2(q)]$. Distribuimos el negativo: **Respuesta:** $H = -3\log_2(p) - \log_2(q)$.

Aplicación 3: Escala Sísmica

Contexto: Comparar sismos arroja $\log(E_1) - \log(E_2) = 1{,}5$. Comprima la expresión de energía para despejar la proporción directa E_1/E_2 entre ambas rupturas tectónicas.

Solución: Por la regla del cociente, la resta se comprime en: $\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1{,}5$. Transformamos de forma logarítmica a exponencial (base 10): $10^{1{,}5} = \frac{E_1}{E_2}$. Resolviendo $10^{3/2} = \sqrt{1000} \approx 31{,}62$. **Respuesta:** La proporción directa es $\approx 31{,}62$ veces mayor.

Aplicación 4: Dinámica Química

Contexto: El potencial de reacción exige evaluar $\ln(K_1 \cdot K_2^{-1/2})$. Expanda la constante de equilibrio logarítmicamente para ingresarla al software de simulación molecular.

Solución: Separamos por el producto: $\ln(K_1) + \ln(K_2^{-1/2})$. Bajamos el exponente negativo de la segunda constante: **Respuesta:** $\ln(K_1) - \frac{1}{2}\ln(K_2)$.

PROFE TEO

Las propiedades simplifican cálculos letales. Si tienes que evaluar fórmulas químicas o financieras enormes, expandirlas a sumas y multiplicaciones salva vidas.

Aplicación 5: Capitalización Financiera

Contexto: Para proyectar la tasa efectiva de una hipoteca agrupada, el banco modela $T = \ln\left(\frac{(1+r)^t}{P_0}\right)$. Descomponga el logaritmo natural en sus tres variables aisladas.
Solución: Primero regla del cociente: $T = \ln((1+r)^t) - \ln(P_0)$. Luego bajamos la potencia temporal t: **Respuesta:** $T = t\ln(1+r) - \ln(P_0)$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué la afirmación $\log_a(x+y) = \log_a(x) \cdot \log_a(y)$ es un error fatal basado en malinterpretar propiedades distributivas?
2. Argumente lógicamente por qué la expresión $\frac{\ln(A)}{\ln(B)}$ jamás podrá ser comprimida usando la regla del cociente $\ln(A/B)$.
3. Al expandir $\log(x^2)$, el resultado es $2\log(x)$. Si evaluamos $x = -5$, la expresión original es válida, pero la expandida no. ¿Qué ajuste de dominio (valor absoluto) falta al aplicar la regla?
4. Visualmente, si un logaritmo se está expandiendo y encontramos tres variables multiplicándose $(A \cdot B \cdot C)$, ¿cuántos términos de suma se generarán?
5. Un compañero comprime $3\log x + \log y$ como $\log(3xy)$. Detecte el error algebraico y justifique el orden correcto de las reglas.
6. ¿Por qué la regla del producto $\log(MN) = \log M + \log N$ es una consecuencia directa de la ley de exponentes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$?
7. Si en la compresión de $A - B - C$ (donde son logaritmos) ambos factores B y C se restan, ¿por qué ambos terminan multiplicándose juntos en el denominador?
8. ¿Es matemáticamente legal utilizar las propiedades de expansión si los logaritmos tienen bases diferentes? (Ej. $\log_2(x) + \log_3(y)$).
9. En la expresión $\ln(e^x \cdot x^e)$, ¿cómo usaría las propiedades para anular completamente la base natural sin usar la calculadora?
10. ¿Por qué la regla de la potencia no aplica sobre la función logarítmica entera, como en $[\log(x)]^2$, y se queda bloqueada?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Expanda completamente $\log_2(8x^3y)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Separa los tres factores con sumas: $\log_2(8) + \log_2(\underline{\qquad}) + \log_2(\underline{\qquad})$.
2. Evalúa $\log_2(8) = \underline{\qquad}$ y baja la potencia del segundo término.
3. Resultado final: $\underline{\qquad} + \underline{\qquad}\log_2(x) + \log_2(y)$.

Problema 2. Comprima a un solo logaritmo: $2\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Sube los coeficientes como exponentes: $\ln(x^{\underline{\quad}}) + \ln(y^{\underline{\quad}})$.
2. Recuerda que la potencia $1/2$ es una raíz: $\ln(\underline{\qquad})$.
3. Une la suma como producto: $\ln(\underline{\qquad\qquad})$.

Problema 3. Evalúe $\log_5(50) - \log_5(2)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica la resta y aplica la regla del cociente: $\log_5\left(\frac{\underline{\qquad}}{\underline{\qquad}}\right)$.
2. Divide internamente: $\log_5(\underline{\qquad})$.
3. Resuelve preguntándote a qué número se eleva el 5. Resultado: $\underline{\qquad}$.

PROFE TEO
Si todos los logaritmos de una línea tienen base natural "ln", tu resultado final también debe usar "ln". ¡No cambies la base!

Problemas Generales

Problema 4. Expanda $\log\left(\frac{100}{x^5}\right)$.

Problema 5. Comprima $3\log_4(A) - 2\log_4(B) + \log_4(C)$.

Problema 6. Expanda analíticamente $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{x^3}{e^2}}\right)$.

Problema 7. Sabiendo que $\ln a = 2$ y $\ln b = 3$, calcule $\ln(a^2 b^3)$.

Problema 8. Comprima $1 + \log_2(x)$. (Pista: exprese el 1 como logaritmo).

Problema 9. Expanda $\log_7\left(\frac{49x^2\sqrt{y}}{z^3}\right)$.

Problema 10. Comprima $\frac{1}{3}\left[\ln(x) + 2\ln(y) - \ln(z)\right]$.

Problema 11. Evalúe $\log_6(9) + \log_6(4)$.

Problema 12. Expanda $\ln\left(\frac{x^2-1}{x^3}\right)$.

Problema 13. Comprima $4\log a - \log b - 2\log c$.

Problema 14. Sabiendo que $\log 5 \approx 0{,}7$, aproxime $\log 250$.

Problema 15. Expanda totalmente $\log_b\left(\frac{\sqrt{x}y^4}{z^5w}\right)$.

Problema 16. Comprima $3\ln(x+2)-\ln(x^2-4)$.

Problema 17. Evalúe $\log_2(80)-\log_2(5)$.

Problema 18. Expanda $\ln\left(\frac{e^x}{x^e}\right)$.

Problema 19. Comprima $\frac{1}{2}\log(x)-\frac{1}{3}\log(y)+\frac{1}{4}\log(z)$.

Problema 20. Calcule $\log_{12}(2)+\log_{12}(8)+\log_{12}(9)$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Una red satelital modula ondas $W = \log_2(8F)$. Expanda la frecuencia portadora para programar el chip receptor separadamente.

Guía de Solución Interactiva

1. Convierte el producto en suma: $\log_2(\underline{\quad})+\log_2(\underline{\quad})$. 2. Simplifica el valor numérico constante resultante: $\underline{\quad}$. 3. La expresión programable desglosada será: $\underline{\quad} + \log_2(F)$.

Problema 2. Un algoritmo criptográfico fusiona claves sumando $\ln(K_1)+\ln(K_2)$. Comprima esta suma para formar el código maestro multiplicativo.

Guía de Solución Interactiva

1. Aplicamos la regla fundamental del producto inverso sobre bases $\underline{\quad}$. 2. Juntamos los argumentos individuales internos: $\ln(\underline{\quad} \cdot \underline{\quad})$. 3. El código maestro encriptado final será $\ln(\underline{\qquad\qquad})$.

Problema 3. Un telescopio calibra luminosidad restando $M = \log(L_1)-\log(L_2)$. Comprima para hallar la tasa comparativa de brillo estelar directo.

Guía de Solución Interactiva

1. Las diferencias de magnitudes exigen utilizar la regla del $\underline{\quad}$. 2. El factor positivo va arriba y negativo abajo: $\log\left(\frac{\underline{\quad}}{\underline{\quad}}\right)$. 3. La tasa de brillo consolidada es la fracción $\log(\underline{\qquad\qquad})$.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una mutación biológica divide células bajo $T = 3\ln(P) + \ln(10)$. Comprima el modelo demográfico para reportar la densidad ecosistémica.

Problema 5. El procesador lógico enfría núcleos según $\log(Q^4/V)$. Expanda la variable termodinámica para aislar la caída de voltaje en los transistores.

Problema 6. La aceleración orbital requiere evaluar $A = \log_3(27R^2)$. Extraiga la constante numérica y expanda el radio satelital.

Problema 7. Cierta economía proyecta PBI calculando $E = \ln(C) - 2\ln(I) + \ln(X)$. Comprima este balance comercial macroeconómico en fracción unificada.

Problema 8. El peritaje forense calcula putrefacción química $D = \log\sqrt{t/k}$. Expanda los factores enzimáticos descartando raíces cuadradas complejas estructuralmente.

Problema 9. Una turbina eólica regula aspas sumando $\log_5(50) + \log_5(2{,}5)$. Evalúe sin calculadora la constante de rotación aerodinámica resultante.

Problema 10. El isótopo de plutonio decae arrojando radiación $R = \ln(M_0 e^{-kt})$. Expanda la ecuación exponencial aislando la semivida temporal radiactiva pura.

Problema 11. Un lente convergente focaliza fotones midiendo $F = \frac{1}{2}\log(A) + \frac{1}{2}\log(B)$. Comprima fusionando diámetros ópticos bajo un solo radical lumínico.

Problema 12. La propagación viral se modela logarítmicamente como $\log(P) - \log(1-P) = k$. Comprima la carga patógena para despejar la función logística.

Problema 13. La densidad de fluidos subterráneos petroleros usa $P = \log_4(64 \cdot V^{-1/3})$. Expanda volumétricamente extrayendo la presión del pozo extractivo.

Problema 14. Un acelerador de partículas exige fusionar $5\ln(V) - 3\ln(M) - \ln(C)$. Comprima los vectores energéticos cuánticos para estabilizar colisiones subatómicas.

Problema 15. El sonar naval rastrea trincheras oceánicas con $\log(D_1^2\sqrt{D_2})$. Desglose perimetralmente la lectura batimétrica para mapear profundidades independientes.

Problema 16. Las neuroredes ponderan decisiones algorítmicas sumando $\log_2(32) - \log_2(2)$. Simplifique el peso sináptico evaluando algebraicamente las respuestas binarias de inteligencia.

Problema 17. Un sismógrafo geológico integra vibraciones mediante $\frac{1}{3}\left[2\log(A) + \log(T)\right]$. Comprima las ondas telúricas para calcular amplitudes consolidadas de terremotos.

Problema 18. La eficiencia aerodinámica exige desarmar $C = \ln\left(\frac{W \cdot \sin(\theta)}{S^2}\right)$. Expanda la fricción del fuselaje separando ángulos y superficies alares expuestas.

Problema 19. El mercado bursátil promedia retornos $R = \log(1+i) + \log(1-i)$. Agrupe financieramente el portafolio consolidando las tasas fluctuantes de interés.

Problema 20. La dosis farmacológica intravenosa decae $\ln(D) - \ln(D_0) = -rt$. Agrupe la depuración sanguínea logarítmicamente para calcular filtrado renal.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $3 + 3\log_2(x) + \log_2(y)$.
2. $\ln(x^2\sqrt{y})$.
3. $\log_5(25) = 2$.
4. $2 - 5\log(x)$.
5. $\log_4(A^3C/B^2)$.
6. $\frac{3}{4}\ln(x) - \frac{1}{2}$.
7. $2(2) + 3(3) = 13$.
8. $\log_2(2x)$.
9. $2 + 2\log_7(x) + \frac{1}{2}\log_7(y) - 3\log_7(z)$.
10. $\ln(\sqrt[3]{xy^2/z})$.
11. $\log_6(36) = 2$.
12. $\ln(x-1) + \ln(x+1) - 3\ln(x)$.
13. $\log(a^4/(bc^2))$.
14. $\log(10 \cdot 25) = 1 + 2(0{,}7) = 2{,}4$.
15. $\frac{1}{2}\log_b(x) + 4\log_b(y) - 5\log_b(z) - \log_b(w)$.
16. $\ln\left(\frac{(x+2)^2}{x-2}\right)$.
17. $\log_2(16) = 4$.
18. $x - e\ln(x)$.
19. $\log\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[4]{z}}{\sqrt[3]{y}}\right)$.
20. $\log_{12}(144) = 2$.

Propuestos de Aplicación

1. $3 + \log_2(F)$.
2. $\ln(K_1 \cdot K_2)$.
3. $\log(L_1/L_2)$.
4. $\ln(10P^3)$.
5. $4\log(Q) - \log(V)$.
6. $3 + 2\log_3(R)$.
7. $\ln(CX/I^2)$.
8. $\frac{1}{2}\log(t) - \frac{1}{2}\log(k)$.
9. $\log_5(125) = 3$.
10. $\ln(M_0) - kt$.
11. $\log(\sqrt{AB})$.
12. $\log\left(\frac{P}{1-P}\right)$.
13. $3 - \frac{1}{3}\log_4(V)$.
14. $\ln\left(\frac{V^5}{M^3C}\right)$.
15. $2\log(D_1) + \frac{1}{2}\log(D_2)$.
16. $\log_2(16) = 4$.
17. $\log(\sqrt[3]{A^2T})$.
18. $\ln(W) + \ln(\sin\theta) - 2\ln(S)$.
19. $\log(1 - i^2)$.
20. $\ln(D/D_0) = -rt$.

$\log(x^p)$

¡Maestría Alcanzada!

'A veces los problemas se ven colosales y pesados, como un exponente inalcanzable. Pero si conoces las reglas adecuadas, puedes bajar ese peso, expandir el problema en partes pequeñas y dominar la situación.'

- El Poder de las Propiedades

¡Brillante esfuerzo! Has desbloqueado las herramientas analíticas más fuertes del álgebra, esenciales para triunfar en el Cálculo Diferencial.

$p \log x$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com