

$= I'(x) - C'(x) = 0$

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

**PROBLEMAS DE
OPTIMIZACIÓN II**

CUADERNO DE TRABAJO

Modelado Económico, Finanzas y Logística

$D = x^2 + y^2$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Dinero, Distancia y Eficiencia

En el mundo real, los recursos son limitados. Las corporaciones buscan **minimizar costos** de producción y logística, mientras buscan **maximizar sus utilidades**. El cálculo nos permite encontrar ese "punto exacto" de eficiencia absoluta modelando funciones algebraicas.

1. Modelado Económico: Costo, Ingreso y Utilidad

Si x representa el número de unidades producidas y vendidas:

- **Costo Total** $C(x)$: Lo que cuesta producir x unidades.
- **Costo Medio** $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$: Costo promedio por unidad.
- **Ingreso Total** $I(x) = x \cdot p(x)$: Dinero que entra, donde $p(x)$ es la ecuación de demanda (precio por unidad).
- **Utilidad (Ganancia)** $U(x) = I(x) - C(x)$.

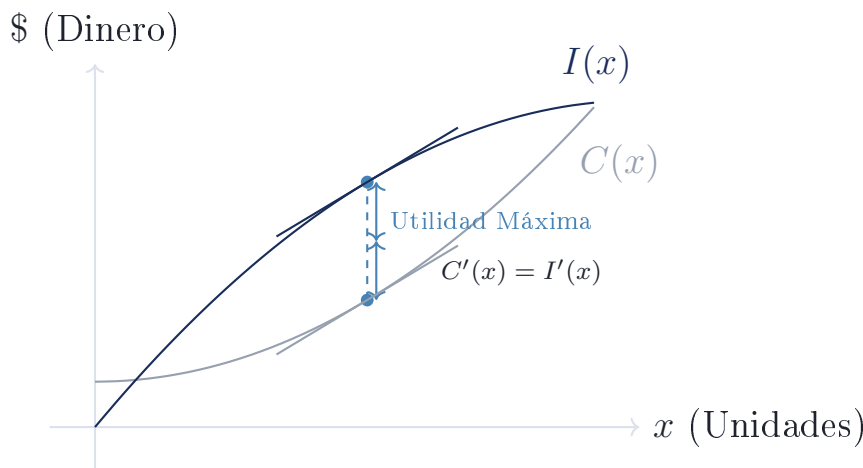
Para maximizar la ganancia, derivamos e igualamos a cero: $U'(x) = 0$, lo que implica que el **Ingreso Marginal debe igualar al Costo Marginal** ($I'(x) = C'(x)$).

2. Minimización Logística y Distancias

Cuando buscamos la ruta más barata o el punto más cercano, modelamos la distancia euclidiana o el costo del tendido:

- Distancia entre un punto (x, y) y un punto fijo (x_0, y_0) :

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$
- Si (x, y) pertenece a una curva (ej. un río o carretera), usamos la ecuación de la curva $y = f(x)$ para dejar la distancia en una sola variable.



....>

PROFE TEO

¡Truco analítico! Para minimizar una distancia $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, te recomiendo minimizar la función $D = d^2$. ¡Te ahorrarás derivar raíces cuadradas molestas!

....>

PROFE TEO

Cuidado en logística: no siempre la línea recta es la más barata. Si tender un cable por tierra cuesta \$10/m y por debajo del agua \$50/m, la ruta óptima será una línea quebrada que minimice el trayecto subacuático.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Maximización de Utilidad

Enunciado: El costo total de producir x artículos es $C(x) = 1500 + 12x + 0,05x^2$. La ecuación de demanda es $p(x) = 60 - 0,03x$. Halle la producción que maximiza la utilidad. **Solución:** 1. Ingreso: $I(x) = x \cdot p(x) = x(60 - 0,03x) = 60x - 0,03x^2$. 2. Utilidad: $U(x) = I(x) - C(x) = (60x - 0,03x^2) - (1500 + 12x + 0,05x^2) = -0,08x^2 + 48x - 1500$. 3. Derivamos: $U'(x) = -0,16x + 48$. 4. Igualamos a cero: $0,16x = 48 \implies x = 48/0,16 = 300$. 5. Confirmación: $U''(x) = -0,16 < 0$ (Máximo). **Respuesta:** Se deben producir y vender 300 artículos.

Problema Resuelto 2: Minimización del Costo Medio

Enunciado: El costo de producción es $C(x) = 400 + 10x + 0,1x^2$. Determine el nivel de producción que minimiza el costo promedio por unidad. **Solución:** 1. Costo Medio: $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{400}{x} + 10 + 0,1x$. 2. Derivamos: $\bar{C}'(x) = -\frac{400}{x^2} + 0,1$. 3. Igualamos a cero: $\frac{400}{x^2} = 0,1 \implies 0,1x^2 = 400 \implies x^2 = 4000 \implies x = \sqrt{4000} \approx 63,24$. Dado que x debe ser entero, probamos 63 y 64. **Respuesta:** El costo promedio se minimiza produciendo 63 artículos.

Problema Resuelto 3: Punto Más Cercano a una Curva

Enunciado: Halle el punto de la parábola $y = x^2 - 1$ que se encuentra más cerca del punto $(0, 2)$. **Solución:** 1. Distancia al cuadrado: $D = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y - 2)^2$. 2. Sustituimos la curva: $y = x^2 - 1 \implies x^2 = y + 1$. $D(y) = (y + 1) + (y - 2)^2 = y + 1 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 3y + 5$. 3. Derivamos: $D'(y) = 2y - 3 = 0 \implies y = 1,5$. 4. Hallamos x : $x^2 = 1,5 + 1 = 2,5 \implies x = \pm\sqrt{2,5} \approx \pm 1,58$. **Respuesta:** Los puntos más cercanos son $(\sqrt{2,5}, 1,5)$ y $(-\sqrt{2,5}, 1,5)$.

Problema Resuelto 4: Costos de Inventario (Modelo EOQ)

Enunciado: Una tienda vende 10,000 unidades al año. El costo de hacer un pedido es de \$50 por orden. El costo de almacenamiento es \$2 por unidad al año (basado en el inventario promedio $x/2$). Halle el tamaño del lote x que minimiza el costo total. **Solución:** 1. Costo anual de pedidos: $50 \times (\text{número de pedidos}) = 50(10000/x) = 500000/x$. 2. Costo de almacenamiento: $2 \times (x/2) = x$. 3. Costo Total $C(x) = \frac{500000}{x} + x$. 4. Derivamos: $C'(x) = -\frac{500000}{x^2} + 1 = 0 \implies x^2 = 500000 \implies x \approx 707,1$. **Respuesta:** El lote óptimo es de 707 unidades por pedido.

....▷

PROFE TEO

El costo medio se minimiza exactamente en el punto donde el costo medio iguala al costo marginal ($\bar{C}(x) = C'(x)$). ¡Puedes usar esta propiedad para comprobar tus respuestas!

Problema Resuelto 5: Distancia Combinada (Cableado)

Enunciado: Un punto A está a 3 km de un río recto. Un punto B está a 4 km río abajo en la orilla opuesta (el río tiene 1 km de ancho). Se desea tender un cable de A a B. El costo en tierra es \$10/m y subacuático \$20/m. Modele la función de costo. **Solución:** El punto cruza el río en una coordenada x (de 0 a 4). Tierra: $\sqrt{3^2 + x^2}$ (asumiendo que corre por la ribera, pero el problema plantea un río. Simplificado: cruza directo al otro lado). Modelo: $C(x) = 10(\text{Distancia Tierra}) + 20(\text{Distancia Agua})$. $C(x) = 10(4 - x) + 20\sqrt{x^2 + 1^2}$. Derivando: $C'(x) = -10 + 20\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \implies 2x = \sqrt{x^2+1} \implies 4x^2 = x^2 + 1 \implies 3x^2 = 1 \implies x = 1/\sqrt{3}$. **Respuesta:** El cable debe cruzar a $1/\sqrt{3}$ km del punto opuesto.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Latencia de Servidores en Trading

Contexto: Un nodo de trading algorítmico procesa transacciones incurriendo en latencia $L(x) = 4x + 100/x$ milisegundos, donde x es el volumen de datos en terabytes. Calcule el volumen de datos que minimiza el retardo del servidor financiero.

Solución: Optimizamos latencia. $L'(x) = 4 - 100/x^2$. Igualamos a cero: $4 = 100/x^2 \implies 4x^2 = 100 \implies x^2 = 25 \implies x = 5$. $L''(x) = 200/x^3 > 0$ (Mínimo absoluto). **Respuesta:** Se deben procesar bloques de 5 terabytes.

Aplicación 2: Costo de Transporte Terrestre

Contexto: Una flota logística transporta carga. El costo de combustible por hora es $C(v) = v^2/100$ dólares (v es velocidad en km/h). El costo operativo es \$40 por hora. Minimice el costo total para un viaje de 500 km.

Solución: Tiempo de viaje: $t = 500/v$. Costo Total $C_T(v) = (v^2/100 + 40) \times t = (v^2/100 + 40)(500/v) = 5v + 20000/v$. $C'_T(v) = 5 - 20000/v^2 = 0 \implies 5v^2 = 20000 \implies v^2 = 4000 \implies v \approx 63,2$ km/h. **Respuesta:** La velocidad más económica es 63,2 km/h.

Aplicación 3: Ingreso en Redes de Suscripción

Contexto: Una plataforma de cursos cobra \$50 mensuales y tiene 1000 usuarios. Por cada \$5 de incremento en la cuota mensual, pierden 40 suscriptores. Determine la cuota mensual para maximizar los ingresos por membresía.

Solución: Aumentos de \$5: sea x la cantidad de aumentos. Precio $p(x) = 50 + 5x$. Usuarios $q(x) = 1000 - 40x$. Ingreso $I(x) = (50 + 5x)(1000 - 40x) = 50000 + 3000x - 200x^2$. $I'(x) = 3000 - 400x = 0 \implies x = 7,5$. Cuota óptima = $50 + 5(7,5) = 87,5$. **Respuesta:** Cobrando \$87,5 mensuales se maximiza el ingreso.

Aplicación 4: Gasoducto Transversal

Contexto: Se debe conectar una bomba a una refinería trazando tubería. En terreno rocoso cuesta \$80/m y en llanura \$50/m. Si la llanura exige desviar la ruta formando un triángulo rectángulo de catetos x y $10 - x$, calcule el gradiente.

Solución: Costo $C(x) = 80\sqrt{x^2 + d^2} + 50(10 - x)$. Derivada: $C'(x) = 80 \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} - 50 = 0$. $80x = 50\sqrt{x^2 + d^2} \implies 6400x^2 = 2500(x^2 + d^2) \implies 3900x^2 = 2500d^2$. **Respuesta:** La desviación óptima ocurre cuando $x = \frac{5}{39}d$.

....▷

PROFE TEO

En modelos de ingresos, recuerda que si subes mucho el precio, la demanda baja. El máximo ingreso siempre es el vértice de esa parábola invisible de equilibrio.

Aplicación 5: Optimización de Almacén

Contexto: Una empresa ensambla placas. Producen lotes de x unidades. El costo de preparar la línea es \$2000. Mantener inventario cuesta \$5 anuales por placa promedio. Para 100,000 placas al año, ¿qué lote minimiza el gasto global?

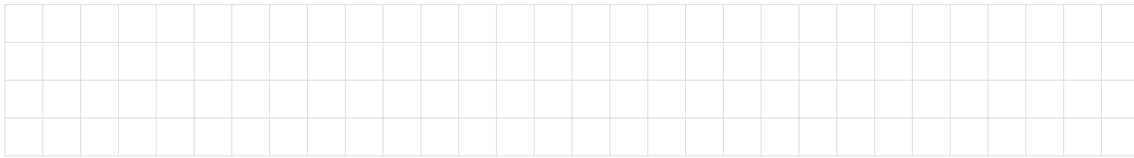
Solución: Costos de set-up: $2000(100000/x) = 200000000/x$. Costos de almacén: $5(x/2) = 2,5x$. Costo total $C(x) = 200000000/x + 2,5x$. $C'(x) = -200000000/x^2 + 2,5 = 0 \implies 2,5x^2 = 200000000 \implies x^2 = 80000000$. $x \approx 8944$. **Respuesta:** El lote de producción óptimo es de 8944 placas.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

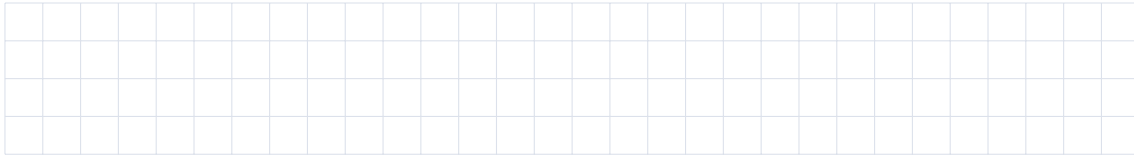
Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice la ecuación de Utilidad Marginal. Si el Costo Marginal excede al Ingreso Marginal en su nivel actual de producción, ¿debería aumentar o reducir la producción? Argumente usando derivadas.
2. En el modelo de costos de inventario (EOQ), ¿qué ocurre matemáticamente con el tamaño óptimo de pedido x si el costo de almacenamiento por unidad se reduce drásticamente a la mitad?
3. Explique por qué minimizar la distancia euclidiana $d = \sqrt{f(x)}$ es analíticamente equivalente a minimizar el argumento $f(x)$. ¿Por qué esto no altera el número crítico obtenido?
4. Un gerente logístico asume que el camino más corto en línea recta siempre será la ruta de menor costo. Use el teorema de Fermat (derivadas) para refutar esta afirmación cuando los medios de transporte tienen tarifas asimétricas (ej. asfalto vs trocha).
5. Considere una función de Costo Medio $\bar{C}(x) = C(x)/x$. Demuestre teóricamente que el Costo Medio alcanza su mínimo exactamente cuando la curva de Costo Marginal cruza a la curva de Costo Medio.
6. En modelos de fijación de precios, la demanda suele ser lineal $p(x) = a - bx$. Demuestre que el ingreso máximo siempre ocurrirá cuando se vende exactamente la mitad de la demanda máxima teórica.
7. Al calcular la ruta óptima de un cable submarino que toca tierra, ¿por qué la solución matemática podría indicar que el cable NO debe tocar el agua en absoluto (ruta de esquina)? ¿Qué significa esto analíticamente?
8. Discuta el concepto de rendimientos marginales decrecientes.^{en} la producción. Geométricamente, ¿esto corresponde a la primera o a la segunda derivada de la función de producción?
9. Si el Estado impone un impuesto fijo de \$1000 mensuales a la empresa, independientemente de cuánto produzca, demuestre usando cálculo diferencial por qué el nivel óptimo de producción x NO se altera.
10. Analice el impacto de un impuesto variable (t dólares por unidad). ¿Cómo se altera la ecuación $I'(x) = C'(x)$ y cómo afecta esto lógicamente el volumen óptimo de producción final?





Problema 20. Halle el punto en la hipérbola $xy = 1$ más próximo al origen usando cálculo.



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

- $x = 200$ unidades.
- $D = 10x^2 - 12x + 4$. Punto $(0,6, -0,2)$.
- $\bar{C}(x) = 800/x + 40 + 0,5x$. $x = 40$.
- $x = 200$. Utilidad Máx \$3500.
- $x = 1,5$. Punto $(1,5, \sqrt{5},5)$.
- $x = 400$. Costo Medio \$100.
- Utilidad $U(x) = 200\sqrt{x} - 2x$. $x = 2500$.
- $v = \sqrt{500} \approx 22,36$.
- Ecuación cúbica $\approx x = 1,56$ o numérico.
- Precio $p = \$30$. $x = 200$.
- $x = 20$ unidades lote.
- Punto $(2,2, -3,4)$. Distancia cuad 1,44.
- $2x + 0,5x = 250 \implies x = 100$.
- Puntos $(-1, \pm\sqrt{3}/2)$ son los más lejanos.
- Si se minimiza en x , $C'(x) = \bar{C}(x)$.
- $v = \sqrt[3]{50\text{costo piloto/constante}}$.
- Cobrar \$95. Renta 85 cuartos.
- $x = 1,5$. Se minimiza con derivadas.
- $I'(x) = 0 \implies x = 50$.
- $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Propuestos de Aplicación

- $x = 100$ toneladas.
- Lote logístico $x = \sqrt{250} \approx 15,8$.
- $x = \sqrt{400} = 20$ terabytes.
- Clúster activo $x = \sqrt[3]{200} \approx 5,8$.
- Desviación de arena a roca: $x = 50/\sqrt{3}$.
- Velocidad crucero $v = 100$ nudos.
- Tarifa base premium \$1600.
- Empalme tierra a $8 - 3/\sqrt{3}$ km.
- Producción liquidación $x = 1000$ ton.
- Estática anulada en $x = 10/3$.
- Partida enfriada de 3000 ton.
- Velocidad eléctrica $v = \sqrt[3]{50000} \approx 36,8$.
- Margen ensamble máximo $x \approx 30,6$.
- Encargo aduanero ≈ 1414 latas fraccionado.
- Codo a $6 - 6(3/4) = 1,5$ millas (aprox pitágoras).
- Butaca \$45 recauda tope masivo evento.
- Abrazadera pared $x = \pm 3$.
- Ritmo abaratador gasoil $v = 100$ km/h.
- Nivel marcha cereal $t = \sqrt{200} \approx 14,1$.
- Circulación token $x = 10 \ln(40) \approx 36,8$.

¡Maximiza tus Resultados!

'La economía y la logística del éxito comparten la misma matemática que este cuaderno: reducir la fricción, minimizar el desgaste innecesario y maximizar la utilidad de tu tiempo. En la bolsa de valores de la vida, cada decisión es una variable. Deriva tus acciones y conviértete en tu propio número crítico.'

- La regla del Ingreso Marginal vital

¡Enhorabuena! Has dominado la frontera donde el cálculo interactúa con la economía.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Umax