

PRECÁLCULO

# PARIDAD DE FUNCIONES

**CUADERNO DE TRABAJO**  
Definición analítica y simetría geométrica

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

## Teoría: La Identidad Oculta de las Funciones

La paridad de una función nos revela su comportamiento de simetría sin necesidad de graficarla por completo. Analíticamente, sometemos a la función a una "prueba de fuego": reemplazamos  $x$  por  $-x$  y observamos cómo reacciona.

### 1. Funciones Pares (Simetría de Espejo)

Una función  $f$  es **par** si para todo  $x$  en su dominio se cumple que:

$$f(-x) = f(x)$$

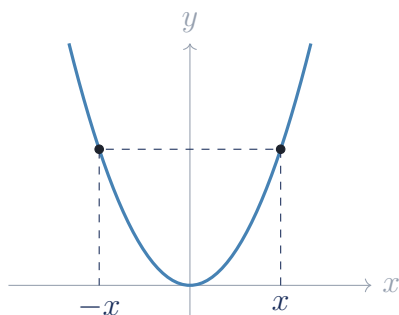
**Geoméricamente:** Su gráfica es simétrica respecto al **eje y**. Si doblas el plano cartesiano por el eje vertical, la mitad derecha coincide exactamente con la mitad izquierda.

### 2. Funciones Impares (Simetría Central)

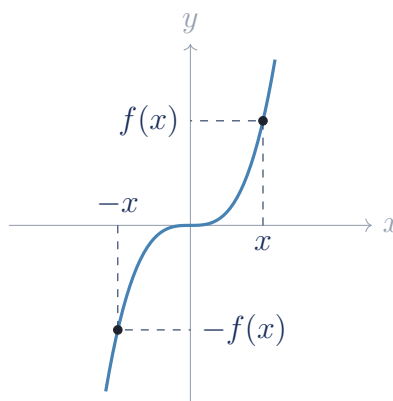
Una función  $f$  es **impar** si para todo  $x$  en su dominio se cumple que:

$$f(-x) = -f(x)$$

**Geoméricamente:** Su gráfica es simétrica respecto al **origen**  $(0, 0)$ . Si rotas la gráfica  $180^\circ$  alrededor del origen, la curva se ve exactamente igual que al inicio.



**FUNCIÓN PAR:**  $f(x) = x^2$



**FUNCIÓN IMPAR:**  $f(x) = x^3$

.... ▷

#### PROFE TEO

¡Regla de oro! Evaluar  $f(-x)$  exige usar paréntesis. Escribir  $-x^2$  no es lo mismo que  $(-x)^2$ . El 90% de los errores en paridad ocurren por olvidar los paréntesis al sustituir.

.... ▷

#### PROFE TEO

Cuidado: Una función puede no ser ni par ni impar. De hecho, la inmensa mayoría de las funciones en el universo no tienen ninguna de estas dos simetrías perfectas.

## Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Polinomio Par

**Enunciado:** Determine algebraicamente la paridad de  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 7$ .

**Solución:** Evaluamos  $f(-x)$ :

$$f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 7.$$

Como toda potencia par elimina el signo negativo:

$$f(-x) = x^4 - 5x^2 + 7.$$

Notamos que  $f(-x) = f(x)$ . Por lo tanto, la función es **par**.

### Problema Resuelto 2: Polinomio Impar

**Enunciado:** Determine la paridad de  $g(x) = 2x^3 - 4x$ .

**Solución:** Evaluamos  $g(-x)$ :

$$g(-x) = 2(-x)^3 - 4(-x).$$

Las potencias impares conservan el signo negativo:

$$g(-x) = -2x^3 + 4x.$$

Factorizamos un  $-1$ :  $g(-x) = -(2x^3 - 4x) = -g(x)$ .

Como  $g(-x) = -g(x)$ , la función es **impar**.

### Problema Resuelto 3: Ausencia de Paridad

**Enunciado:** Analice la paridad de  $h(x) = x^2 + 3x$ .

**Solución:** Evaluamos  $h(-x)$ :

$$h(-x) = (-x)^2 + 3(-x) = x^2 - 3x.$$

Comprobación 1:  $x^2 - 3x \neq x^2 + 3x \implies$  No es par.

Comprobación 2: Factorizamos  $-1 \implies -(x^2 - 3x) \neq -h(x) \implies$  No es impar.

La función **no es ni par ni impar**.

### Problema Resuelto 4: Función Racional

**Enunciado:** Determine la paridad de  $p(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ .

**Solución:**  $p(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1}$ .

Extraemos el signo negativo de la fracción:

$$p(-x) = -\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right) = -p(x).$$

La función es **impar**.

### Problema Resuelto 5: Valor Absoluto

**Enunciado:** Analice  $f(x) = x|x|$ .

**Solución:** Recordemos que  $|-x| = |x|$  por definición.

Evaluamos  $f(-x) = (-x)|-x|$ .

Sustituyendo el valor absoluto:  $f(-x) = -x|x|$ .

Esto equivale a  $-(x|x|) = -f(x)$ .

La función es **impar**.

....▷

### PROFE TEO

Para demostrar que una función es impar, siempre factoriza un signo menos ( $-$ ) de toda tu expresión final. Si lo que queda dentro del paréntesis es tu función original, ¡entonces es impar!

## Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Arquitectura de Puentes

**Contexto:** El arco de un puente colgante se modela como  $A(x) = 50 - 0,02x^2$ , con  $x$  indicando la distancia al centro. Pruebe analíticamente que la carga se distribuye con simetría de espejo.

**Solución:** Reemplazamos  $x$  por  $-x$ :

$$A(-x) = 50 - 0,02(-x)^2 = 50 - 0,02x^2 = A(x).$$

**Respuesta:** Al ser una función par, la estructura es perfectamente simétrica respecto al pilar central (eje Y).

### Aplicación 2: Electromagnetismo

**Contexto:** Un campo magnético alrededor de un hilo conductor responde a  $B(r) = \frac{k}{r^3}$ , donde  $r$  es la distancia direccional. Evalúe la paridad para predecir la polaridad magnética inversa.

**Solución:**  $B(-r) = \frac{k}{(-r)^3} = \frac{k}{-r^3} = -\left(\frac{k}{r^3}\right) = -B(r).$

**Respuesta:** Es una función impar. La simetría central confirma que al invertir la dirección, el campo magnético invierte exactamente su polaridad.

### Aplicación 3: Dispersión de Calor

**Contexto:** El perfil de temperatura de un microprocesador obedece a  $T(x) = 80 - 5|x|$ , donde  $x$  es la posición desde el núcleo. Determine la paridad del modelo térmico.

**Solución:**  $T(-x) = 80 - 5|-x|$ . Sabiendo que  $|-x| = |x|$ :

$$T(-x) = 80 - 5|x| = T(x).$$

**Respuesta:** Es una función par. El calor se disipa uniformemente hacia la izquierda y derecha del núcleo central.

### Aplicación 4: Dinámica de Fluidos

**Contexto:** El torque generado por una turbina hidráulica se modela como  $\tau(\omega) = \omega|\omega|$ , con  $\omega$  como velocidad angular. Analice su paridad para comprender el empuje bidireccional.

**Solución:**  $\tau(-\omega) = (-\omega)|-\omega| = -\omega|\omega| = -\tau(\omega).$

**Respuesta:** Es función impar. Si el flujo de agua se invierte, la turbina genera exactamente la misma magnitud de torque, pero en dirección contraria.

....▷

### PROFE TEO

En modelos físicos, una función par suele representar equilibrio (como distribución de masa o calor), mientras que una impar representa fuerzas opuestas (como torque o campos magnéticos).

**Aplicación 5: Estadística Demográfica**

**Contexto:** La densidad de población urbana alrededor del centro de la ciudad decae según la campana matemática  $P(d) = 1000e^{-d^2}$ . Demuestre algebraicamente el tipo de simetría demográfica.

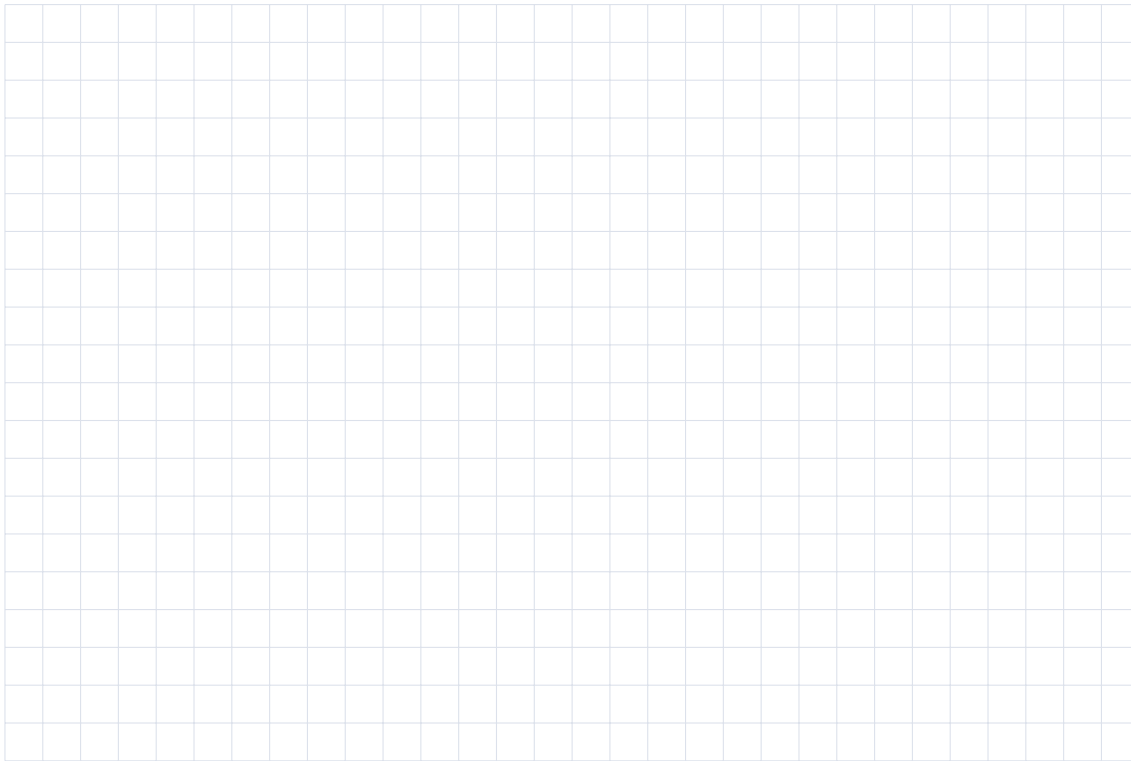
**Solución:**  $P(-d) = 1000e^{-(-d)^2} = 1000e^{-d^2} = P(d)$ .

**Respuesta:** Es una función par. La densidad poblacional es idéntica en cualquier dirección asumiendo el centro de la ciudad como origen coordenado.

## Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos analíticos o gráficos.

1. Si una función es impar y está definida en  $x = 0$ , ¿cuál debe ser obligatoriamente el valor de  $f(0)$ ? Justifique usando la definición  $f(-x) = -f(x)$ .
2. Explique por qué la suma de dos funciones pares siempre dará como resultado otra función par. Demuéstrelo algebraicamente.
3. ¿Qué sucede con la paridad si multiplicamos una función par por una función impar? Argumente su respuesta analíticamente.
4. Si desplazamos la gráfica de una función par  $y = x^2$  tres unidades hacia la derecha, ¿la nueva función resultante sigue siendo par? Geométricamente, ¿por qué?
5. Una función polinómica contiene términos con exponentes tanto pares como impares (ej.  $x^3 + x^2$ ). ¿Por qué este tipo de polinomios nunca posee paridad?
6. Argumente por qué la función constante  $f(x) = 5$  es considerada una función par en todo su dominio real.
7. ¿Es posible que exista una función que sea simultáneamente par e impar en todos los números reales? De ser así, ¿cuál es?
8. Analice la paridad del cociente de dos funciones impares. ¿El resultado es par, impar, o carece de paridad?
9. En un contexto geométrico, si dibujamos una función impar y la doblamos a lo largo del eje Y, y luego a lo largo del eje X, ¿qué deberíamos observar?
10. Explique por qué el dominio de una función par o impar debe ser simétrico respecto al origen (ej.  $[-5, 5]$  es válido, pero  $[-3, 5]$  no).





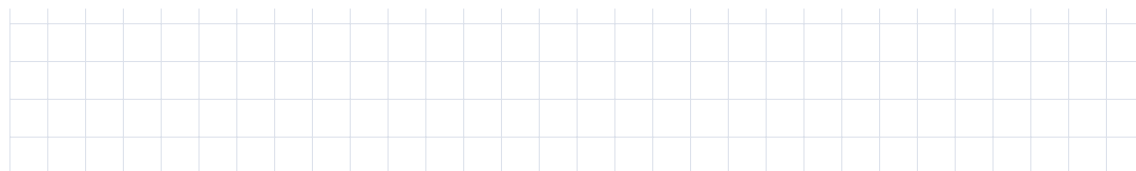




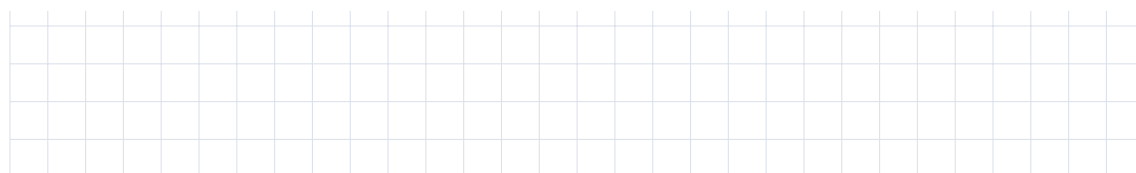








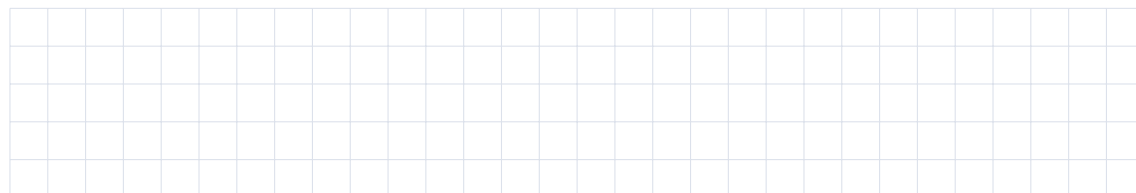
**Problema 18.** La deformación de una lámina metálica por prensa obedece  $Y(x) = |x^3| + \sqrt[4]{x^2}$ . Demuestre matemáticamente la homogeneidad visual del estampado industrial terminado.



**Problema 19.** Un circuito integrado regula sobrecargas mediante impedancia  $Z(i) = \frac{i^4 - i^2}{i^3 + i}$ . Determine si la respuesta eléctrica presenta simetría de origen.



**Problema 20.** La distribución de velocidades del gas interestelar sigue  $f(v) = v^2 e^{-v^2/c^2}$ . Analice la paridad de la densidad térmica de las partículas confinadas.



## Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

1. Par
2. Impar
3. Impar
4. Par
5. Impar
6. Ninguna (términos par e impar).
7. Impar
8. Par
9. Par
10. Impar
11. Par
12. Ninguna
13. Impar
14. Impar
15. Par
16. Impar
17. Ninguna
18. Par
19. Impar
20. Par

### Propuestos de Aplicación

1. Par (simetría de espejo).
2. Impar.
3. Par.
4. Par (riesgo simétrico).
5. Impar.
6. Par.
7. Impar.
8. Par (campo uniforme en lados opuestos).
9. Ninguna paridad (no hay simetría).
10. Impar.
11. Par.
12. Impar.
13. Ninguna.
14. Ninguna (vértice desplazado).
15. Impar.
16. Par.
17. Impar.
18. Par.
19. Impar.
20. Par.

## ¡Llegaste al Final!

'La naturaleza ama la simetría. Al descubrir si una función es par o impar, estás descifrando el código secreto de cómo el universo equilibra sus fuerzas.'

- El balance de las gráficas

¡Felicidades! Ahora tienes visión de rayos X para las matemáticas. Ya no necesitas graficar a ciegas para predecir el comportamiento del otro lado del eje.

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)