

PRECÁLCULO

LOS NÚMEROS REALES

CUADERNO DE TRABAJO
Clasificación y Propiedades Fundamentales

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Sistema de los Números Reales

El conjunto de los números reales (\mathbb{R}) es el pilar sobre el cual se construye todo el cálculo. Representa cualquier cantidad continua que pueda ubicarse en una recta numérica. Comprender su estructura nos permite modelar desde finanzas algorítmicas hasta proporciones geométricas.

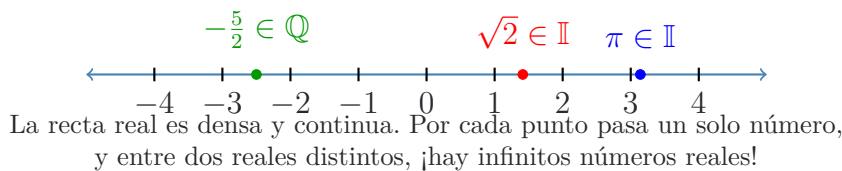
Los Reales (\mathbb{R}) se dividen en dos grandes conjuntos disjuntos:

- **Racionales (\mathbb{Q}):** Todo número expresable como fracción $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$). Incluye a los Enteros (\mathbb{Z}) y a los Naturales (\mathbb{N}). Sus decimales son exactos o periódicos.
- **Irracionales (\mathbb{I} o $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$):** No pueden expresarse como fracción de enteros. Sus decimales son infinitos y no periódicos (ej. $\pi, \sqrt{2}, e$).

Advertencia Importante: ¡No confundan periodicidad con irracionalidad! $0,333\dots$ es infinito pero periódico, por tanto es racional ($\frac{1}{3}$).

Para la suma y multiplicación, los reales cumplen propiedades vitales:

- **Conmutativa:** $a + b = b + a$ y $ab = ba$.
- **Asociativa:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(ab)c = a(bc)$.
- **Distributiva:** $a(b + c) = ab + ac$. (¡Clave para factorizar!)
- **Elementos Neutros:** Existe el 0 (aditivo, $a + 0 = a$) y el 1 (multiplicativo, $a \cdot 1 = a$).
- **Inversos:** Opuesto aditivo ($-a$, tal que $a + (-a) = 0$) e inverso multiplicativo (a^{-1} o $1/a$, tal que $a \cdot (1/a) = 1$ para $a \neq 0$).



....▷

COMENTARIO

¡Hola a todos! Antes de correr con ecuaciones, hay que caminar por los axiomas. Conocer cómo se comportan los números reales les evitará errores de concepto gravísimos en la universidad.

....▷

COMENTARIO

La propiedad distributiva es el puente entre la suma y la multiplicación. Úsela de derecha a izquierda y estarán factorizando. ¡Es el pan de cada día!

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Clasificación Fina

Enunciado: Clasifique el número $x = 0,999\dots$ en el conjunto numérico más restrictivo al que pertenece.

Solución: Sea $x = 0,999\dots$. Multiplicamos por 10: $10x = 9,999\dots$

Restamos la ecuación original: $10x - x = 9,999\dots - 0,999\dots$

$9x = 9 \implies x = 1.$

Como 1 es un entero positivo, pertenece al conjunto de los Naturales.

Respuesta: \mathbb{N} .

Problema Resuelto 2: Uso de Axiomas

Enunciado: Demuestre, usando los axiomas de cuerpo, que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Solución: Tomemos $(a + b)$ como un solo número real x .

$(a + b)(c + d) = x(c + d) = xc + xd$ (por prop. distributiva).

Sustituimos x por $(a + b)$: $(a + b)c + (a + b)d$.

Aplicamos distributiva nuevamente: $ac + bc + ad + bd$.

Ordenamos por prop. conmutativa de la suma: $ac + ad + bc + bd$. L.Q.Q.D.

Problema Resuelto 3: Inversos

Enunciado: Encuentre el inverso multiplicativo de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Solución: El inverso multiplicativo de x es $\frac{1}{x}$.

Inverso: $I = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

Racionalizamos multiplicando por el conjugado:

$$I = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Respuesta: $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Problema Resuelto 4: Ley de Cancelación

Enunciado: Si $ax = bx$, ¿es correcto afirmar siempre que $a = b$?

Solución: No necesariamente. La ley de cancelación se basa en multiplicar por el inverso de x , es decir, x^{-1} .

Para que x^{-1} exista, x debe ser distinto de cero ($x \neq 0$).

Si $x = 0$, la ecuación es $a(0) = b(0) \implies 0 = 0$, lo cual es cierto para cualquier valor de a y b . Por lo tanto, solo implica $a = b$ si garantizamos que $x \neq 0$.

....▷

COMENTARIO

Es anti-intuitivo, pero $0,999\dots$ y 1 son exactamente el mismo número real, no una aproximación.

....▷

COMENTARIO

El producto de un número por su inverso multiplicativo siempre da 1. Hagan la prueba mentalmente: suma por diferencia es diferencia de cuadrados.

Problema Resuelto 5: Valor Absoluto y Distancia

Enunciado: Simplifique la expresión $|x - 5| + |x - 2|$ sabiendo que $2 < x < 5$.

Solución: El valor absoluto $|a|$ es a si $a \geq 0$, y $-a$ si $a < 0$.

Como $x < 5$, entonces $x - 5$ es negativo, por ende $|x - 5| = -(x - 5) = 5 - x$.

Como $x > 2$, entonces $x - 2$ es positivo, por ende $|x - 2| = x - 2$.

Sumando: $(5 - x) + (x - 2) = 5 - x + x - 2 = 3$.

Respuesta: 3.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Geometría (Números Irracionales)

Contexto: Un arquitecto diseña una plaza cuadrada de 100 m^2 de área. Necesita colocar un cable tensor en la diagonal exacta. ¿Cuál es el conjunto numérico más restrictivo de la longitud del cable?

Solución: El lado es $\sqrt{100} = 10 \text{ m}$. La diagonal por Pitágoras es $\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ m}$. Como $\sqrt{2}$ es irracional, el producto de un racional no nulo por irracional es irracional. Pertenece a \mathbb{I} .

Aplicación 2: Economía (Axioma Distributivo)

Contexto: En misdulcecitos.com se venden pasteles. Cada cliente compra 2 pasteles de chocolate (\$15 c/u) y 2 de vainilla (\$10 c/u). Si hay N clientes, exprese el ingreso usando la propiedad distributiva para facilitar el cálculo.

Solución: Ingreso total = $N \cdot (2(15) + 2(10))$. Usando distributiva sacando el factor común 2: $\text{Ingreso} = 2N(15 + 10) = 2N(25) = 50N$. Simplifica calcular el efectivo total directamente.

Aplicación 3: Medicina (Números Racionales)

Contexto: Un médico receta a un paciente $\frac{3}{4}$ de miligramo de un medicamento cada 8 horas. ¿Cuántos miligramos exactos habrá consumido en 5 días?

Solución: Un día tiene $24/8 = 3$ tomas. En 5 días son 15 tomas. Total consumido = $15 \times \frac{3}{4} = \frac{45}{4} \text{ mg}$. En decimal es 11,25 mg. Pertenece al conjunto \mathbb{Q} .

Aplicación 4: Ciencias de la Computación (Densidad)

Contexto: Un algoritmo genera una clave de seguridad ubicando un número exactamente a la mitad entre 0,1010 y 0,1011. ¿Qué propiedad de los reales asegura que esto es posible y cuál es el número?

Solución: Es posible por la **propiedad de densidad** (entre dos reales distintos hay otro real). El número es el promedio: $\frac{0,1010+0,1011}{2} = \frac{0,2021}{2} = 0,10105$.

Aplicación 5: Física (Notación y Exponentes)

Contexto: La luz viaja a $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Para hallar el espacio recorrido en un año, se multiplican varios factores enteros y racionales. ¿A qué conjunto pertenece la respuesta final teórica?

Solución: Multiplicar enteros (10^8 , 365, 24, 3600) da como resultado un número entero muy grande. Todo entero pertenece a los racionales y a los reales. El conjunto más restrictivo es \mathbb{N} (Naturales).

....>

COMENTARIO

Las raíces que no son exactas siempre nos lanzan al conjunto de los irracionales. ¡Pitágoras descubrió esto con horror en su época!

....>

COMENTARIO

Las fracciones son la forma más precisa de operar. Los decimales a veces inducen a redondeos que en medicina o finanzas causan desastres.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responde argumentando mediante propiedades, axiomas y lógica matemática.

1. ¿Por qué la división por cero no está definida en los axiomas de los números reales? Analice asumiendo que $1/0 = x$.
2. Se dice que entre dos números racionales siempre hay un irracional. ¿Es cierto? Dé un ejemplo entre 1 y 2.
3. Si $a, b \in \mathbb{I}$ (irracionales), ¿es obligatoriamente cierto que su suma $a + b$ también sea irracional? Justifique.
4. ¿Por qué el conjunto de los Naturales (\mathbb{N}) no es un "cuerpo" bajo las definiciones axiomáticas? (Pista: Piense en los inversos).
5. Si $x^2 = 2$, sabemos que $x \in \mathbb{I}$. ¿Podemos afirmar que un irracional elevado a un irracional siempre es irracional? (Pista: Analice $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$).
6. Al resolver admisiones para la Villarreal, muchos marcan que el número π es igual a $22/7$. Discuta el error conceptual desde la clasificación real.
7. Si el inverso aditivo de x es $-x$, y el multiplicativo es $1/x$, ¿qué número real es su propio opuesto aditivo? ¿Y su propio inverso multiplicativo?
8. Explique cómo la propiedad asociativa permite que las computadoras paralelizen sumas de matrices enormes.
9. ¿Qué diferencia profunda existe entre un decimal con infinitas cifras y uno periódico, si ambos no terminan nunca?
10. Demuestre informalmente por qué $-(a) = -1 \cdot a$ utilizando los axiomas de elemento neutro e inverso aditivo.



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. \mathbb{N} (Es 2)
2. $-x + 12$
3. Opuesto: 0,2, Inverso: -5
4. \mathbb{I} (Irracional)
5. \mathbb{N} (Es $\sqrt{9} = 3$)
6. Verdadera (\mathbb{V})
7. $2 - \sqrt{3}$
8. Propiedad Asociativa de la adición
9. y
10. \mathbb{N} (Es 1)
11. $ac > bc$ (Inversión de desigualdad)
12. $5/12$ (Promedio)
13. \mathbb{N} o \mathbb{Z} (Es 0)
14. 0 (El neutro es único)
15. 1
16. b) $\mathbb{I} \subset \mathbb{Q}$ es Falso (son disjuntos).
17. Falso. Contraejemplo: $x = \sqrt[4]{2}$.
 $x^2 = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$.
18. $5/11 \in \mathbb{Q}$
19. $x+a+(-a) = 0+(-a) \implies x+0 = -a$
20. 2

Propuestos de Aplicación

1. \$80
2. Quedan $3/8 \in \mathbb{Q}$
3. 10π , Irracional (\mathbb{I})
4. Exacta en lo real (\mathbb{I}), imposible físicamente perfecto.
5. $30x$
6. Elemento Inverso (Opuesto Aditivo)
7. 4.5 es \mathbb{Q} , 9 es \mathbb{N}
8. Requieren lo mismo (son iguales)
9. Precisión finita (punto flotante vs real)
10. Propiedad Conmutativa
11. Son iguales ($3/4 = 75/100$)
12. Irracionales (\mathbb{I})
13. Inverso multiplicativo (Neutro=1)
14. No exacta (decimales infinitos)
15. $2/3$
16. Matemáticamente son iguales.
17. Velocidad original, Inverso Mult.
18. Sí, sigue siendo irracional.
19. No, racional (entero/7 siempre $\in \mathbb{Q}$)
20. Opuesto Aditivo (Inverso)

π

¡Misión Cumplida!

"Dios hizo los números enteros, el resto es obra de los hombres."

- Leopold Kronecker

¡Sigue dominando el lenguaje del universo! Las bases sólidas construyen grandes mentes.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

$\sqrt{2}$