CÁLCULO DE UNA VARIABLE

NÚMEROS CRÍTICOS

CUADERNO DE TRABAJO

El Teorema de Fermat

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Los Puntos de Inflexión del Cambio

Para encontrar las cimas o los valles de una función (máximos y mínimos), primero debemos identificar los çandidatos.ª serlo. El matemático Pierre de Fermat descubrió que estos extremos solo pueden ocurrir en lugares muy específicos de la curva: donde la tangente es horizontal o donde la curva tiene un quiebre brusco.

Teorema de Fermat

Si una función f tiene un máximo o mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces la recta tangente en ese punto es horizontal; es decir, $f'(c) = 0$.

PROFE TEO

¡Atención! Fermat nos da una vía de ida, pero no de vuelta. Si $f'(c) = 0$, NO significa que obligatoriamente haya un máximo o mínimo. Puede ser un punto de silla, como en $y = x^3$ cuando $x = 0$.

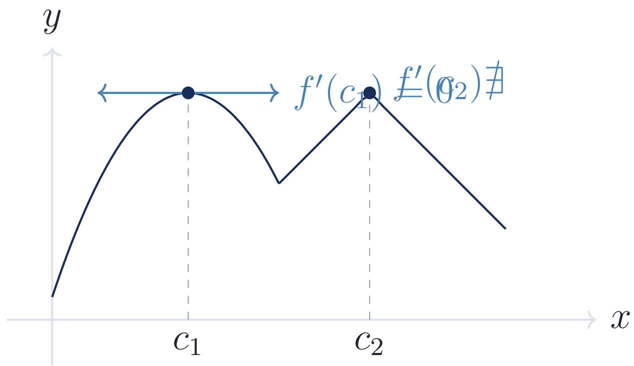
Definición de Número Crítico

Un número c en el **dominio** de una función f se llama **número crítico** si se cumple al menos una de estas dos condiciones:

1. $f'(c) = 0$ (La tangente es horizontal).
2. $f'(c)$ no existe (Hay un pico, una cúspide o una tangente vertical).

PROFE TEO

¡La trampa mortal de los exámenes! Si al derivar y despejar obtienes $x = 2$, pero resulta que en la función original $x = 2$ crea una división entre cero... ¡entonces NO ES un número crítico! Para ser crítico, primero debe existir en el dominio original.



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Polinomio Básico

Enunciado: Halle los números críticos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. **Solución:** El dominio es $\mathbb{R}$. Derivamos la función: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ La derivada es un polinomio, existe en todas partes. Solo buscamos donde se hace cero: $3x^2 - 6x = 0 \implies 3x(x - 2) = 0$. De aquí obtenemos $x = 0$ y $x = 2$. Ambos están en el dominio de f. **Respuesta:** Los números críticos son $x = 0, 2$.

PROFE TEO

Siempre factoriza la derivada al máximo. Una buena factorización te deja las raíces servidas en bandeja de plata. No intentes despejar mentalmente ecuaciones cuadráticas o de mayor grado.

Problema Resuelto 2: Cúspides y Radicales

Enunciado: Determine los números críticos de $f(x) = x^{2/3}$. **Solución:** El dominio de $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ es $\mathbb{R}$. Derivamos: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. ¿Dónde $f'(x) = 0$? En ninguna parte, porque el numerador $2 \neq 0$. ¿Dónde $f'(x)$ NO existe? Cuando el denominador es cero, es decir, en $x = 0$. Verificamos: ¿Está $x = 0$ en el dominio de f? Sí, $f(0) = 0$. **Respuesta:** El único número crítico es $x = 0$.

Problema Resuelto 3: La Trampa del Dominio

Enunciado: Encuentre los números críticos de $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. **Solución:** El dominio de f es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Derivamos usando regla del cociente: $f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Buscamos donde $f'(x) = 0$: $x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = 0, x = 2$. Buscamos donde $f'(x)\nexists$: En $x = 1$. Pero $x = 1$ **NO** está en el dominio original de f. Se descarta. **Respuesta:** Los números críticos son $x = 0$ y $x = 2$.

Problema Resuelto 4: Ciclidad Trigonométrica

Enunciado: Halle los números críticos de $f(x) = x - 2\sin x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. **Solución:** Derivamos: $f'(x) = 1 - 2\cos x$. Buscamos donde se anula: $1 - 2\cos x = 0 \implies \cos x = 1/2$. En el ciclo trigonométrico de 0 a 2π, el coseno vale $1/2$ en el primer y cuarto cuadrante. Por lo tanto, los ángulos son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. Ambos están en el dominio. **Respuesta:** Los números críticos son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$.

Problema Resuelto 5: Extremos Trascendentes

Enunciado: Determine los números críticos de $y = x\ln(x)$. **Solución:** El dominio es $x > 0$. Derivamos aplicando regla del producto: $y' = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1$. Igualamos a cero: $\ln x + 1 = 0 \implies \ln x = -1$. Despejamos aplicando la exponencial a ambos lados: $x = e^{-1} = 1/e$. El valor $1/e$ es positivo, así que pertenece al dominio original. **Respuesta:** El único número crítico es $x = 1/e$.

PROFE TEO

Al derivar un logaritmo, cuidado con el dominio inicial. $\ln(x)$ solo existe para $x > 0$. Cualquier valor de x que obtengas al final que sea negativo o cero, debe ser eliminado.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Freno de Turbina

Contexto: Una turbina eólica altera su giro por ráfagas. La velocidad angular responde a $W(t) = 4t - t^2$ radianes por segundo. Determine el instante exacto donde la aceleración se anula, marcando un número crítico de rotación estable temporal.

Solución: Derivamos la velocidad para obtener aceleración: $W'(t) = 4 - 2t$. Igualamos a cero para hallar el número crítico: $4 - 2t = 0 \implies 2t = 4$. Despejando: $t = 2$. **Respuesta:** El número crítico ocurre a los 2 segundos.

Aplicación 2: Optimización de Costos

Contexto: El costo marginal de manufacturar procesadores escala mediante función $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15$ dólares. Halle el volumen de producción donde el cambio del costo frena momentáneamente marcando punto crítico operativo industrial.

Solución: Derivamos la función de costos: $C'(q) = 3q^2 - 12q$. Buscamos números críticos: $3q(q - 4) = 0$. Obtenemos $q = 0$ y $q = 4$. **Respuesta:** Los números críticos son 0 y 4 procesadores.

PROFE TEO

En biología matemática, un punto crítico en el crecimiento de una población casi siempre marca el momento en el que los recursos se acaban o una plaga logra frenar la expansión celular.

Aplicación 3: Estancamiento Celular

Contexto: Un cultivo bacteriano modifica su densidad poblacional según $N(h) = 100he^{-h/2}$. Detecte la hora crítica donde la tasa de reproducción celular se congela evidenciando saturación biológica del agar nutritivo orgánico.

Solución: $N'(h) = 100e^{-h/2} + 100h(-1/2)e^{-h/2} = e^{-h/2}(100 - 50h)$. Igualamos a cero. La exponencial nunca es cero, así que: $100 - 50h = 0 \implies 50h = 100 \implies h = 2$. **Respuesta:** El punto crítico es a las 2 horas.

Aplicación 4: Dilatación Térmica

Contexto: Un lingote de aleación sufre estrés longitudinal térmico modelado por $S(T) = \frac{T}{T^2+9}$ milímetros. Determine la temperatura crítica absoluta que anula el gradiente de deformación física del metal forjado bajo horno cerrado.

Solución: $S'(T) = \frac{1(T^2+9) - T(2T)}{(T^2+9)^2} = \frac{9-T^2}{(T^2+9)^2}$. Para anular, el numerador debe ser cero: $9 - T^2 = 0 \implies T^2 = 9$. Temperaturas físicas $T = 3$ y $T = -3$. **Respuesta:** Las temperaturas críticas son ± 3 grados.

Aplicación 5: Catálisis Química

Contexto: La velocidad de asimilación reactiva de un polímero decrece obedeciendo $V(m) = (m-1)^{2/3}$ gramos. Ubique la masa crítica donde la fluidez de reacción colapsa generando una singularidad química incalculable instantánea sistémica.

Solución: Derivamos: $V'(m) = \frac{2}{3}(m-1)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{m-1}}$. Buscamos donde $V'(m) = 0$ (imposible, numerador 2). Buscamos donde $V'(m)\nexists$: en el denominador cero, $m - 1 = 0 \implies m = 1$. Pertenece al dominio. **Respuesta:** La masa crítica es 1 gramo.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice el rol estructural del Dominio. Si una función racional posee una asíntota vertical en $x = a$, ¿por qué es matemáticamente imposible clasificar a "$a$como un número crítico, aunque $f'(a)$ no exista?
2. El Teorema de Fermat establece que $f'(c) = 0$ en un extremo local. Argumente mediante un contraejemplo geométrico claro por qué la existencia de un número crítico no garantiza en absoluto un pico o un valle en la curva.
3. Evalúe el impacto de la derivada inexistente. Dibuje un gráfico y explique la diferencia cinemática entre un móvil que alcanza $f'(c) = 0$ y otro que alcanza un punto donde $f'(c)\nexists$.
4. Un compañero calcula que los números críticos de $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ son $x = 0$. Refute esta afirmación demostrando el colapso lógico del dominio real en ese punto específico.
5. Compare la búsqueda de números críticos entre polinomios puros y funciones con radicales pares. ¿Qué papel juegan los bordes del dominio (como $x = 0$ en $\sqrt{x}$) en la definición formal de número crítico?
6. Analice la estructura $f(x) = |x|$. Demuestre paso a paso usando límites por la izquierda y derecha por qué la derivada falla en el origen, convirtiendo al cero en un número crítico por excelencia.
7. Discuta el peligro analítico de simplificar fracciones antes de derivar. Si $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, ¿cómo altera la simplificación algebraica la identificación correcta de sus números críticos originales?
8. En funciones trigonométricas continuas como $\sin(x)$, los números críticos se repiten infinitamente. Deduzca una fórmula general que englobe todos los números críticos del seno utilizando el número entero n.
9. Argumente lógicamente por qué una función estrictamente lineal de la forma $y = mx + b$ (con $m \neq 0$) jamás poseerá un número crítico en todo el espectro de los números reales.
10. En la optimización de problemas físicos, a menudo se descartan números críticos negativos. Explique bajo qué contextos la matemática arroja resultados correctos analíticamente, pero inservibles termodinámica o temporalmente.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle los números críticos del polinomio $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Guía de Solución Interactiva

1. Obtenemos la derivada de la función: $f'(x) =$ _______________.
2. Factorizamos buscando igualar a cero: $6($__________$)($__________$) = 0$.
3. Despejamos raíces confirmando dominio: $x =$ _____ y $x =$ _____.

Problema 2. Obtenga los números críticos de la racional $y = \frac{x}{x^2+1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Regla del cociente: $y' = \frac{(1)(x^2+1)-x(\_\_\_\_\_\_)}{(x^2+1)^2} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{(x^2+1)^2}$.
2. El denominador nunca es cero, igualamos numerador: $1 - x^2 = 0$.
3. Extraemos las soluciones válidas: $x =$ _____ y $x =$ _____.

Problema 3. Determine el número crítico de $f(x) = x^2e^{-3x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Derivamos con regla del producto: $f'(x) = 2xe^{-3x} + x^2($__________$)$.
2. Factorizamos el término común xe^{-3x}: $xe^{-3x}($_______________$) = 0$.
3. Como $e^{-3x} \neq 0$, los críticos son: $x =$ _____ y $x =$ _____.

PROFE TEO

Las funciones combinadas con exponenciales (e^x) son muy amigables porque e^x NUNCA es cero. Al igualar la derivada a cero, puedes descartar o dividir entre e^x sin miedo a perder soluciones.

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Calcule los números críticos de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 1$.

Problema 5. Determine los críticos de $y = -2x^2 + 8x - 5$.

Problema 6. Halle los números críticos de la función $f(x) = (x-2)^3(x+1)^2$.

Problema 7. Derive e identifique críticos para $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Problema 8. Resuelva los valores críticos de $y = x^{4/5}$.

Problema 9. Encuentre los números críticos para $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$.

Problema 10. Determine los críticos trascendentes de $h(t) = t^3 \ln(t)$.

Problema 11. Determine el número crítico de la función $f(x) = x - \ln(x)$.

Problema 12. Obtenga los puntos críticos de $y = x^2\sqrt{3-x}$.

Problema 13. Derive la función trigonométrica $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$ y halle críticos en $[0, 2\pi]$.

Problema 14. Halle los críticos de la función valor absoluto anidada $y = |x^2 - 9|$.

Problema 15. Calcule los críticos de $f(x) = e^{2x} - 4e^{x}$.

Problema 16. Determine los valores críticos de $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Problema 17. Resuelva el operador analítico para $f(w) = \sin^2(w) + \cos(w)$ en $[0, 2\pi]$.

Problema 18. Encuentre los críticos de la función recíproca $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

Problema 19. Pruebe analíticamente los críticos de la función inversa $y = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

Problema 20. Halle los números críticos de la composición radicular $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La presión de una válvula reguladora fluctúa modelada bajo $P(t) = t^3 - 12t$ kilopascales. Identifique el momento crítico de torsión estática nula en válvulas de bombeo hidráulico.

Guía de Solución Interactiva

1. Extraer gradiente presurizado: $P'(t) = \underline{\hspace{2cm}} = 0$. 2. Factorizamos los tiempos temporales: $3(t^2 - \underline{\hspace{1cm}}) = 0$. 3. Descartando el negativo, el crítico es $t = \underline{\hspace{2cm}}$ segundos.

Problema 2. El flujo luminoso láser en fibra óptica disipa según $I(x) = x^2e^{-x}$ lúmenes. Calcule la distancia nodal crítica donde el rebote fotónico genera saturación de pulso continuo puro.

Guía de Solución Interactiva

1. Regla producto fotónico: $I'(x) = 2xe^{-x} - \underline{\hspace{2cm}} = 0$. 2. Agrupando exponencial óptico: $xe^{-x}(\underline{\hspace{2cm}}) = 0$. 3. La saturación crítica ocurre en $x = \underline{\hspace{2cm}}$ kilómetros.

Problema 3. Una probeta de resina deforma su estructura según ecuación tensorial $T(s) = (s-4)^{4/5}$ milímetros. Diagnose el esfuerzo crítico umbral de rotura donde el material presenta singularidad de desgarre inminente.

Guía de Solución Interactiva

1. Derivada de deformación: $T'(s) = \frac{4}{5}(s-4)^{\underline{\hspace{1cm}}}$. 2. Buscando denominador cero: $5(s-4)^{\underline{\hspace{1cm}}} = 0$. 3. La resina alcanza esfuerzo crítico de desgarre en $s = \underline{\hspace{2cm}}$.

· · · · ▷

PROFE TEO

Las singularidades físicas ($f'(c)$ no existe) suelen representar puntos de rotura o estrés máximo en materiales. Si obtienes un crítico por "denominador cero", ¡asegúrate que el material aún exista en ese punto!

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La logística satelital rastrea trayectoria de cohete consumiendo combustible calculando aceleración variable $A(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$. Determine los instantes críticos marcando fluctuación nula de aceleración atmosférica motriz.

Problema 5. El voltaje capacitivo de circuito analógico alterna su resonancia marcando picos $V(c) = c + \frac{9}{c}$ voltios. Identifique resistencia capacitiva crítica estabilizando flujo eléctrico puro transitorio electrónico integral.

Problema 6. La aerodinámica del perfil ala delta experimenta turbulencia de fricción modelada función $F(v) = v^{2/3}(v - 5)$ newtons. Obtenga velocidad límite crítica donde flujo laminar presenta quiebres estructurales cortaviento de desgarre.

Problema 7. Una sala de servidores mineros acumula calor residual disipando temperatura refrigerante $R(h) = \frac{h^2}{h-4}$ grados. Halle nivel de ventilación crítico operando ventiladores en punto singular termodinámico inestable absoluto de hardware.

Problema 8. El rendimiento biológico de fotosíntesis foliar reacciona exposición solar marcando fotosintatos $K(L) = L^3 \ln(L)$ glucosas. Estime luminosidad crítica colapsando producción metabólica basal paralizando ciclo de Calvin vegetal clorofílico integral.

Problema 9. El evaporador condensador salino marea costera decrece volumen métrico líquido bajo gradiente $E(t) = te^{-t^2/2}$ galones. Pronostique temporalidad crítica marcando máxima evaporación estuarial inercial solar deshidratadora extrema ecológica.

Problema 10. El nodo de enrutamiento digital acusa latencia ping fluctuante por $L(p) = \sin^2(p)$ milisegundos retardo continuo. Diagnostique embotellamiento crítico estacionario minimizando colisiones estáticas de ruteo global en intervalo primera fase pi.

Problema 11. La celda electrolítica acumula ion sulfato perdiendo capacidad recarga amperaje voltaje función memoria $D(c) = (c^2 - 16)^{1/3}$ ciclos. Cuantifique umbral crítico desgaste estructural insalvable corrosión de placa catódica inoperativa total.

Problema 12. El escudo blindaje radiológico absorbe penetración partículas gamma dosis letal curva optimizada $R(x) = \frac{\ln x}{x}$ rems. Encuentre densidad crítica confinamiento donde aislante bloquea fuga radiactiva plomada atómica blindada maciza.

Problema 13. La bomba extractora de fluidos viscosos eleva lodo pesado socavón mina modelando esfuerzo $F(h) = h^4 - 2h^3$ toneladas. Detecte momento crítico fatiga inercial masiva paralizando extracción bombeo perimetral subterráneo constante.

Problema 14. El monobloque aleación automotriz carbono prueba tensión mecánica elástica rotura tracción resiliencia elástica $M(x) = |x^2 - 25|$ newtons. Identifique punto crítico estructural quiebre absoluto fragilidad material molecular microfisuras inminentes.

Problema 15. El choque de frente de onda sismográfica rasante propaga placa tectónica registrando telúrica vibración local $O(t) = t - \sin(t)$. Extraiga tiempo crítico estático destructivo silenciando inicial oscilación de onda epicentral profunda.

Problema 16. El láser de mecanizado corte funde titanio focalizando prisma fotones concentración calor calorimétrica $Q(r) = r^2 - r^4/2$ julios. Obtenga foco crítico fusión plasma puro pulso cuántico focal exacto métrico ablativo.

Problema 17. El tracto gastrointestinal asimila cápsula nanomédica liberando torrente sanguíneo principio activo analgésico según $B(t) = \arcsin(t/2)$ miligramos hora. Determine momento crítico saturación absorción fisiológica metabolismo orgánico sanguíneo hepático general orgánico final.

Problema 18. La marea costera lunar altera canal navegación estuario rocoso elevando quillas buque flotabilidad $H(x) = \sec(x)$ pies bajamar. Detecte cota crítica estática rocoso buque encallado fosa marina bajante gravitacional marina abismal.

Problema 19. La red neuronal perceptrón actualiza pesos retropropagando error cuadrático aprendizaje profundo máquina iterando pérdida $J(w) = w^3e^{-w}$. Establezca peso crítico exactitud modelo predictivo inteligencia artificial convergente singularidad entrenamiento óptimo.

Problema 20. El acelerador colisionador de positrones confina plasma antimateria electromagnética derivando repulsión campo magnético $C(z) = \sqrt[5]{z-1}$ teslas. Evalúe foco crítico singularidad inestable vacío absoluto repulsivo contención focal magnética nuclear caótica.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $x = 1, x = -2$.
2. $x = 1, x = -1$.
3. $x = 0, x = 2/3$.
4. $x = 0, x = 4, x = -1$.
5. $x = 2$.
6. $x = 2, x = -1, x = 1/5$.
7. $x = 0, x = 5, x = -5$.
8. $x = 0$ (derivada no existe).
9. $x = 1, x = 3$.
10. $t = e^{-1/3}$.
11. $x = 1$.
12. $x = 0, x = 12/5, x = 3$.
13. $x = 3\pi/4, x = 7\pi/4$.
14. $x = 0, x = 3, x = -3$.
15. $x = \ln 2$.
16. $x = \sqrt{e}$.
17. $w = 0, \pi, 2\pi, \pi/3, 5\pi/3$.
18. $x = 2, x = -2$.
19. $x = 0$.
20. $x = 2, x = -1, x = 1/2$.

Propuestos de Aplicación

1. $t = 2$ s. (t=-2 descartado).
2. $x = 2, x = 0$ km.
3. $s = 4$ (singularidad).
4. $t = 1, t = 5$.
5. $c = 3$ voltios.
6. $v = 2, v = 0$ Mach.
7. $h = 8, h = 0$.
8. $L = e^{-1/3}$ lux.
9. $t = 1$ galón.
10. $p = \pi/2$ ms.
11. $c = 4, c = -4$ ciclos.
12. $x = e$ rems.
13. $h = 0, h = 1{,}5$ ton.
14. $x = 5, x = -5, x = 0$ (absolutos).
15. $t = 0, t = 2\pi$, etc.
16. $r = 1, r = -1, r = 0$.
17. $t = 2, t = -2$ (frontera dominio).
18. $x = 0$ pies.
19. $w = 0, w = 3$ sesgo.
20. $z = 1$ Tesla (denominador cero).

¡El Punto Crítico!

'La vida y las matemáticas comparten una regla inquebrantable: los cambios más espectaculares ocurren en los momentos críticos. Ya sea cuando te detienes a respirar y tu ritmo se vuelve cero, o cuando enfrentas un quiebre agudo donde tu rutina no existe. ¡Busca tus números críticos y maximiza tu potencial!'

- La regla del análisis personal

¡Enhorabuena! Has dado el paso más importante hacia la optimización analítica.

c

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com