CÁLCULO DE UNA VARIABLE

LA NOCIÓN DE LÍMITE

CUADERNO DE TRABAJO

Aproximación, Recta Tangente y Área

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: La Noción Intuitiva de Límite

El cálculo diferencial e integral se construye sobre un concepto fundamental: el **límite**. Intuitivamente, el límite nos dice a qué valor se aproxima una función $f(x)$ a medida que la variable x se acerca a un valor específico a.

1. Aproximación Numérica

Si evaluamos valores muy cercanos a a (tanto por la izquierda, $x < a$, como por la derecha, $x > a$), podemos observar la tendencia de $f(x)$. Si ambos lados convergen al mismo número L, decimos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Advertencia: La aproximación numérica puede ser engañosa si la función oscila salvajemente cerca de a. Siempre se debe respaldar con análisis algebraico.

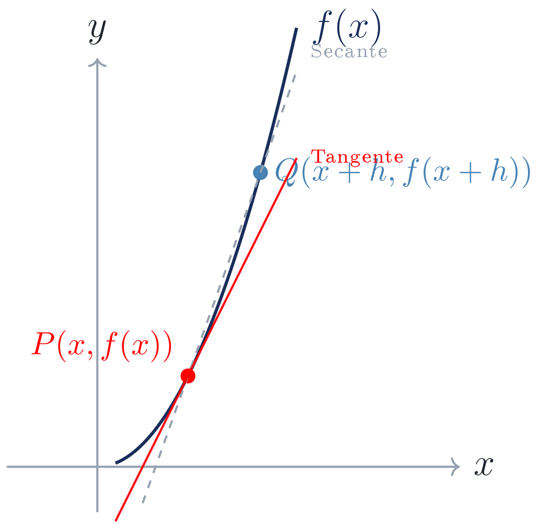
PROFE TEO

¡Cuidado! Una cosa es lo que vale la función en el punto $f(a)$ y otra muy distinta es hacia dónde *apunta* el límite. ¡A veces $f(a)$ ni siquiera existe y el límite sí!

2. El Problema de la Recta Tangente (Geometría)

Para hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto P, usamos rectas **secantes**. Si trazamos una secante por P y otro punto cercano Q, y hacemos que Q se acerque a P, la recta secante se convierte en la recta tangente.

- Pendiente secante: $m_{sec} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Pendiente tangente: $m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



PROFE TEO

Geométricamente, hacer $h \to 0$ significa que la distancia horizontal entre los dos puntos de corte desaparece. ¡La secante se vuelve tangente!

3. El Problema del Área

¿Cómo calcular el área bajo una curva irregular? La estrategia es dividir el área en rectángulos de base Δx. A medida que aumentamos el número de rectángulos ($n \to \infty$) y su base tiende a cero ($\Delta x \to 0$), la suma de sus áreas converge al área real bajo la curva.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

PROFE TEO

Esto es la base de las integrales. Llenamos el área con infinitos rectángulos infinitamente delgados. ¡Matemática pura en acción!

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Aproximación Numérica

Enunciado: Estime numéricamente $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ usando $x = \pm 0{,}1, \pm 0{,}01$.
Solución: 1. Evaluamos (en radianes): Para $x = 0{,}1 \implies \frac{\sin(0{,}1)}{0{,}1} \approx 0{,}99833$ Para $x = 0{,}01 \implies \frac{\sin(0{,}01)}{0{,}01} \approx 0{,}99998$ 2. Como la función es par, los valores negativos dan el mismo resultado. 3. **Conclusión:** A medida que x se acerca a 0, $f(x)$ se aproxima a 1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

PROFE TEO

Recuerda que si el límite te da 0/0, significa "hay que trabajar más". No significa que el límite sea cero ni que no exista.

Problema Resuelto 2: Límite Algebraico con Raíces

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.
Solución: Al evaluar directamente obtenemos la forma indeterminada 0/0. Multiplicamos por la conjugada del numerador:

$$\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

Cancelamos el factor común $(x-4)$ que causa el cero:

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

Problema Resuelto 3: Pendiente de la Tangente

Enunciado: Halle la pendiente de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x$ en $x = 2$ usando la definición por límite.
Solución: Aplicamos $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$. $f(2) = 2^2 - 3(2) = -2$. $f(2 + h) = (2+h)^2 - 3(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = h^2 + h - 2$.

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + h - 2 - (-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+1)}{h}$$

$$m = \lim_{h\to 0}(h+1) = 0 + 1 = 1$$

Problema Resuelto 4: Límite Infinito Analítico

Enunciado: Determine $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{2x^3+7x}$.
Solución: Dividimos cada término por la mayor potencia de x en el denominador (x^3):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{7}{x^2}}$$

Cuando $x \to \infty$, los términos divididos por x tienden a cero:

$$\frac{5 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$$

Problema Resuelto 5: Límites Laterales en Función a Trozos

Enunciado: Sea $f(x) = \{2x+1 \text{ si } x < 1;\ x^2+2 \text{ si } x \geq 1\}$. Halle $\lim_{x\to 1} f(x)$.
Solución: Límite por la izquierda ($x \to 1^-$): $\lim_{x\to 1^-}(2x+1) = 2(1)+1 = 3$. Límite por la derecha ($x \to 1^+$): $\lim_{x\to 1^+}(x^2+2) = (1)^2 + 2 = 3$. Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$, el límite existe y es 3.

PROFE TEO
Las funciones a trozos son las reinas de los límites laterales. ¡Si los lados no cuadran, el límite global no existe!

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Cinemática de Partículas

Contexto: Un dron experimental sigue una trayectoria donde su altura en metros está dada por $H(t) = 4t^2 - t$. Calcule su velocidad instantánea exacta a los $t = 3$ segundos utilizando la definición de límite.
Solución: La velocidad es el límite de la razón de cambio: $V = \lim_{h\to0} \frac{H(3+h)-H(3)}{h}$. Evaluando: $V = \lim_{h\to0} \frac{4(9+6h+h^2)-(3+h)-33}{h} = \lim_{h\to0}(23 + 4h) = 23$. **Respuesta:** 23 m/s.

Aplicación 2: Costo Marginal Económico

Contexto: Una ensambladora tiene un costo de producción $C(x) = 5000 + 10x - 0{,}05x^2$ dólares para x procesadores. Determine el costo marginal al ensamblar exactamente 100 unidades aproximando con límites.
Solución: Costo marginal es $C'(100) = \lim_{h\to0} \frac{C(100+h)-C(100)}{h}$. Al operar los términos polinómicos y dividir entre h, queda $\lim_{h\to0}(10-0{,}1(100)-0{,}05h) = 0$. **Respuesta:** El costo marginal es 0 dólares/unidad.

····▷
PROFE TEO
Las tasas de variación instantánea siempre son un problema de recta tangente disfrazado en un contexto real.

Aplicación 3: Dinámica Poblacional

Contexto: Las bacterias en un estanque crecen según $P(t) = 1000 \cdot 2^t$, con t en horas. Exprese, sin evaluar numéricamente el límite, la tasa de crecimiento instantánea a las 5 horas de iniciado el estudio.
Solución: Planteamos el límite que define la derivada en $t = 5$: $T = \lim_{h\to0} \frac{P(5+h)-P(5)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{1000(2^{5+h}-2^5)}{h}$. **Respuesta:** $T = 32000 \lim_{h\to0} \frac{2^h-1}{h}$.

Aplicación 4: Área Irregular de un Terreno

Contexto: Se debe pavimentar un lote limitado por $y = 9 - x^2$ y el eje X. Plantee el área como un límite de sumas de Riemann usando rectángulos por la derecha con n subintervalos.
Solución: Ancho $\Delta x = \frac{3-(-3)}{n} = \frac{6}{n}$. $x_i = -3 + i\frac{6}{n}$. El área es el límite de la suma de áreas rectangulares. **Respuesta:** $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[9 - \left(-3 + \frac{6i}{n}\right)^2\right] \frac{6}{n}$.

Aplicación 5: Caudal Variable de un Dique

Contexto: El volumen vaciado de una represa obedece a $V(t) = 50\sqrt{t+1}$ megalitros (t en horas). Calcule la tasa de vaciado instantáneo en la hora cero usando límites algebraicos.
Solución: $Q = \lim_{t\to0} \frac{V(t)-V(0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{50\sqrt{t+1}-50}{t}$. Multiplicando por la conjugada: $\lim_{t\to0} \frac{50t}{t(\sqrt{t+1}+1)} = \frac{50}{2} = 25$. **Respuesta:** 25 megalitros por hora.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué la existencia de $f(a)$ es totalmente irrelevante para determinar la existencia del límite $\lim_{x\to a} f(x)$?
2. Si al evaluar un límite obtiene la forma $0/0$, argumente por qué este resultado no garantiza que el límite sea 0, infinito, ni que no exista.
3. Desde una perspectiva geométrica, describa el proceso exacto de cómo una recta secante se transforma en tangente.
4. ¿Qué diferencia esencial existe entre la tasa de variación media de un fenómeno y su tasa de variación instantánea?
5. Explique por qué el límite $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe evaluando el comportamiento lateral numérico.
6. Si aproximamos el área bajo una curva curva creciente usando rectángulos inscritos, ¿el límite nos dará una subestimación, sobrestimación o el valor exacto al hacer $n \to \infty$?
7. Un estudiante afirma que ün límite infinito significa que el límite sí existe y su valor es infinito". Refute o confirme esta afirmación con rigor matemático.
8. Analice la función $\sin(1/x)$ cerca del origen. ¿Por qué fracasa la aproximación numérica para hallar $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$?
9. Si el límite de $f(x)$ y $g(x)$ cuando $x \to a$ no existen de forma individual, ¿es posible que el límite de $f(x) + g(x)$ sí exista? Dé un ejemplo.
10. En el problema del área, ¿por qué es indispensable que el ancho del rectángulo Δx dependa inversamente de n al plantear el límite al infinito?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule el límite evaluando la indeterminación: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Al sustituir directamente $x = 3$, se obtiene la forma $\frac{\_\_\_}{\_\_\_}$.
2. Factoriza el numerador (diferencia de cuadrados): $\frac{(x-\_\_\_)(x+\_\_\_)}{x-3}$.
3. Simplifica el factor conflictivo y evalúa: $\lim_{x\to 3}(x + \_\_\_) = \_\_\_$.

Problema 2. Halle la pendiente de la tangente a $y = 5x^2$ en $x = 1$ usando límites.

Guía de Solución Interactiva

1. La definición es $m = \lim_{h\to 0} \frac{5(1+h)^2-\_\_\_}{h}$.
2. Desarrolla el binomio: $\lim_{h\to 0} \frac{5(1+2h+h^2)-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\_\_\_}{h}$.
3. Factoriza h, simplifica y evalúa el límite: $m = \_\_\_$.

Problema 3. Resuelva el límite con radical: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Multiplica por el conjugado: $\frac{\sqrt{x+25}-5}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+25}+\_\_\_}{\sqrt{x+25}+\_\_\_}$.
2. Aplica diferencia de cuadrados arriba: $\frac{(\_\_\_)-25}{x(\sqrt{x+25}+5)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+25}+5)}$.
3. Simplifica la x y evalúa para $x = 0$: El resultado es $\frac{1}{\_\_\_}$.

PROFE TEO
Las raíces cuadradas en los límites casi siempre piden a gritos que uses su multiplicador conjugado.

Problemas Generales

Problema 4. Calcule $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$.

Problema 5. Determine el límite numéricamente construyendo una tabla: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

Problema 6. Halle $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-3x+2}{7x^2+5}$.

Problema 7. Resuelva el límite $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$.

Problema 8. Determine si el límite existe analizando laterales: $\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$.

Problema 9. Usando límites, halle la recta tangente a $y = \frac{1}{x}$ en $x = 2$.

Problema 10. Calcule $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

Problema 11. Halle el límite trigonométrico $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{4x}$.

Problema 12. Evalue el límite al infinito: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

Problema 13. Calcule $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$.

Problema 14. Plantee y evalúe la pendiente tangente de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 9$.

Problema 15. Determine $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Problema 16. Calcule el límite lateral $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{|x-2|}$.

Problema 17. Halle las constantes a y b si $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x} = 1$.

Problema 18. Evalue el límite compuesto $\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Problema 19. Plantee el límite de Riemann para el área bajo $f(x) = e^x$ en $[0, 2]$. (Sin resolver).

Problema 20. Calcule rigurosamente $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un tanque se drena y el volumen en galones es $V(t) = 100(1-t)^2$. Calcule la tasa de vaciado instantánea en $t = 0{,}5$ usando límites.

Guía de Solución Interactiva

1. Definimos el límite: $\lim_{h\to 0} \frac{V(0{,}5+h)-\_\_\_\_\_}{h}$. 2. Desarrollando el binomio interno y evaluando queda: $\lim_{h\to 0}(\_\_\_\_\_\_)$. 3. El límite resultante en valor numérico es _____ galones/h.

Problema 2. Los ingresos por ventas digitales en miles siguen $I(x) = 5x - x^2$. Halle el ingreso marginal al vender 2 unidades.

Guía de Solución Interactiva

1. El límite para la tangente es: $\lim_{h\to 0} \frac{I(2+h)-\_\_\_\_\_}{h}$. 2. Al simplificar términos numéricos constantes nos queda $\lim_{h\to 0}(\_\_\_\_\_\_)$. 3. Sustituyendo $h = 0$, el ingreso marginal es _____ miles.

Problema 3. Una masa fúngica avanza radialmente con área $A(r) = \pi r^2$. Indique la tasa de crecimiento superficial respecto al radio cuando $r = 4$.

Guía de Solución Interactiva

1. La variación es $\lim_{h\to 0} \frac{\pi(4+h)^2-\_\_\_\_\_}{h}$. 2. Expandiendo el binomio cuadrado: $\lim_{h\to 0} \frac{\pi(16+8h+h^2)-16\pi}{h} = \lim_{h\to 0} \pi(\_\_\_\_\_\_)$. 3. Evaluando la h, obtenemos un crecimiento de _____.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La temperatura de una caldera disminuye siguiendo $T(m) = 100/(m+1)$. Calcule algebraicamente la velocidad instantánea de enfriamiento exacto a los tres minutos de apagarla.

Problema 5. Un satélite orbital modifica su altitud según $A(t) = 400 + 50t - t^2$. Determine su tasa de ascenso límite a los cinco segundos.

Problema 6. Cierta reacción bioquímica degrada un sustrato bajo el modelo $S(t) = \sqrt{t+9}$. Establezca mediante límites la rapidez de reacción al instante cero.

Problema 7. El nivel de tráfico web de un servidor colapsado modela visitas $V(t) = 1000/(t^2 + 1)$. Plantee el límite para la pérdida instantánea de usuarios en $t = 1$.

Problema 8. Una epidemia proyecta su expansión de contagios $C(d) = d^3 + 2d$. Halle rigurosamente el ritmo de infección instantáneo cumplido el segundo día.

Problema 9. La rentabilidad de un activo criptográfico traza la curva $R(x) = \sin(x)/x$. Averigüe la rentabilidad tendencial cuando la inversión inicial tiende a cero.

Problema 10. Un proyectil militar describe una parábola $Y(x) = 10x - x^2$. Calcule la pendiente de su trayectoria tangencial justo a los dos metros de avance.

Problema 11. La deforestación amazónica destruye hectáreas a razón de $H(a) = \frac{a^2-16}{a-4}$. ¿Hacia qué valor asintótico tiende la pérdida si los años se aproximan a cuatro?

Problema 12. El campo magnético de un electroimán oscila en base a $B(t) = t\sin(1/t)$. Evalue el comportamiento límite del campo magnético a muy largo plazo.

Problema 13. La dilatación térmica en una viga estructural obedece a $L(T) = \sqrt{T^2 + 5T} - T$. Halle la cota máxima de expansión límite a temperaturas extremas.

Problema 14. Un fármaco experimental es filtrado renalmente formando el límite $\lim_{t\to 2} \frac{t^3-8}{t-2}$. Determine la constante de eliminación teórica resuelta de esta expresión.

Problema 15. El decaimiento de intensidad acústica en un pasillo obedece a $I(d) = 5/(d-1)$. Analice los límites laterales de intensidad acústica alrededor del metro de distancia.

Problema 16. Las turbinas eólicas generan voltajes de alta tensión con saltos definidos $V(w) = |w-3|/(w-3)$. ¿Existe continuidad de tensión al pasar los tres nudos de viento?

Problema 17. Un fluido viscoso cae por un conducto. Su resistencia friccional se evalúa como $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(4x)}{x^2}$. Determine numéricamente este coeficiente crítico de arrastre.

Problema 18. La memoria de silicio transfiere bits configurando sumatorias discretas $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}$. Demuestre si el flujo total satura o tiende a cero absoluto.

Problema 19. Cierto material radiactivo en un contenedor libera energía $E(t) = \frac{\sqrt{t+a}-\sqrt{a}}{t}$. Formule la emisión en el instante exacto cero utilizando conjugadas de límites.

Problema 20. La eficiencia de frenado aerodinámico en un hiperauto arroja un patrón marginal de $F(v) = \frac{\sin(2v)+\tan(3v)}{v}$. Calcule la fuerza de frenado a velocidad cero.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 0/0, 3, 3, 6. Limit=6.
2. $5(1)^2 = 5$, $10h + 5h^2$, 10.
3. 5, 5, $x + 25$, 10.
4. 12.
5. 1.
6. 4/7.
7. -1.
8. No existe (laterales 1 y -1).
9. Pendiente $-1/4$, Ec: $y - 1/2 = -1/4(x - 2)$.
10. $3x^2$.
11. 3/4.
12. 1/2.
13. 1/2.
14. 1/6.
15. 1/2.
16. -4.
17. $a = 6, b = 9$.
18. 1.
19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{2i/n} \frac{2}{n}$.
20. $c/3$.

Propuestos de Aplicación

1. $V(0{,}5) = 25$, $-100 + 100h$, -100.
2. $I(2) = 6$, $1 - h$, 1.
3. 16π, $8 + h$, 8π.
4. $-6{,}25$ grados/min.
5. 40 m/s.
6. 1/6 unidades/s.
7. -500 visitas/s.
8. 14 casos/día.
9. 1 (lim fundamental).
10. Pendiente de 6.
11. 8 hectáreas/año.
12. 1 Tesla (ó unidad B).
13. Expansión límite 5/2.
14. 12 mg/hora.
15. $-\infty$ por izq, $+\infty$ por der. No.
16. No hay continuidad (salto de -1 a 1).
17. Coeficiente 8.
18. Tiende a cero absoluto.
19. $1/(2\sqrt{a})$.
20. Fuerza de 5.

$\to 0$

¡Llegaste al Límite!

'A veces sientes que no avanzas, como una aproximación asintótica. Pero recuerda, cada pequeño delta de esfuerzo acerca tu conocimiento al infinito.'

- El poder de la constancia matemática

¡Excelente trabajo! Has logrado dominar la transición numérica hacia las herramientas más potentes del cálculo diferencial e integral.

lím

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com