$N(t) = N_0 e^{kt}$

PRECÁLCULO

CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO

CUADERNO DE TRABAJO

Interés, Poblaciones y Vida Media

$A = Pe^{rt}$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Pulso de la Naturaleza y el Dinero

Las funciones exponenciales son el lenguaje en el que el universo escribe sobre los cambios drásticos. Ya sea dinero en un banco, bacterias en una placa o radiación en un fósil, todo obedece a las mismas reglas matemáticas.

1. Modelos Financieros: Interés Compuesto

Cuando el dinero genera intereses sobre intereses, usamos dos modelos dependiendo de cuántas veces al año se capitaliza:

- **Capitalización Discreta (n veces al año):**

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Donde A es monto final, P el principal inicial, r la tasa anual decimal, n periodos por año, t años.

- **Capitalización Continua:**

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Se usa cuando el dinero crece sin pausas, cada microsegundo.

PROFE TEO

¡Ojo con la tasa r o k! En las fórmulas SIEMPRE debes ingresar el porcentaje convertido a decimal. El 5 % se ingresa como 0,05.

2. Modelos Biológicos y Físicos

La ley general de crecimiento o decaimiento ininterrumpido está dada por:

$$N(t) = N_0e^{kt}$$

- Si $k > 0$, es **Crecimiento Exponencial** (bacterias, virus, poblaciones).
- Si $k < 0$, es **Decaimiento Exponencial** (isótopos, enfriamiento, depreciación).

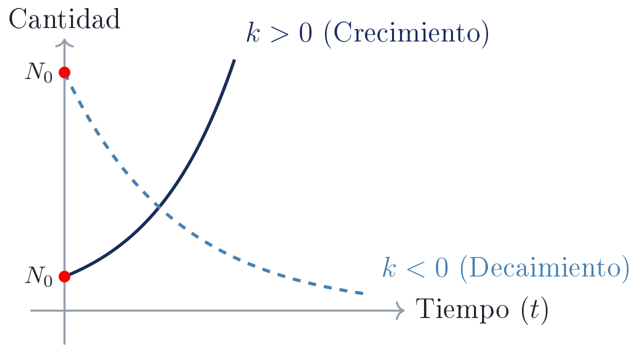
PROFE TEO

Si un problema biológico no te da la constante k, te dará dos puntos en el tiempo. Usa el punto inicial para hallar N_0 y el segundo punto para despejar k usando ln.

3. La Vida Media

La "vida media"(h) es el tiempo exacto necesario para que una cantidad se reduzca a la mitad de su valor inicial.

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/h} \quad \text{o bien} \quad m(t) = m_0e^{-kt} \text{ donde } k = \frac{\ln 2}{h}$$



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Despeje en Capitalización

Enunciado: Halle el tiempo t necesario para que \$1000 se conviertan en \$1500 al 6 % compuesto mensualmente.
Solución: Fórmula: $A = P(1 + r/n)^{nt}$. Datos: $A = 1500$, $P = 1000$, $r = 0{,}06$, $n = 12$.

$$1500 = 1000\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12t} \implies 1{,}5 = (1{,}005)^{12t}$$

Aplicamos ln: $\ln(1{,}5) = 12t \cdot \ln(1{,}005)$.

$$t = \frac{\ln(1{,}5)}{12\ln(1{,}005)} \approx 6{,}77 \text{ años.}$$

Problema Resuelto 2: Duplicación Continua

Enunciado: ¿A qué tasa de interés continuo r un capital se duplica en exactamente 8 años?
Solución: Usamos $A = Pe^{rt}$. Si se duplica, $A = 2P$.

$$2P = Pe^{r(8)} \implies 2 = e^{8r}$$

Aplicamos ln: $\ln(2) = 8r$.

$$r = \frac{\ln(2)}{8} \approx 0{,}0866 \implies 8{,}66\,\%$$

PROFE TEO
Para duplicar una inversión en interés continuo (Pe^{rt}), el tiempo siempre será $t = \frac{\ln(2)}{r}$. ¡Esa es la fórmula mágica financiera!

Problema Resuelto 3: Hallando la Constante k

Enunciado: Una variable sigue $N(t) = N_0 e^{kt}$. Si $N(0) = 50$ y $N(4) = 150$, halle k.
Solución: Sabemos que $N_0 = 50$. Evaluamos en $t = 4$:

$$150 = 50e^{k(4)} \implies 3 = e^{4k}$$

Tomamos ln: $\ln(3) = 4k \implies k = \frac{\ln(3)}{4} \approx 0{,}2747$.

Problema Resuelto 4: Ecuación de Vida Media

Enunciado: Si la masa de una sustancia es $m(t) = 200(1/2)^{t/15}$, halle el tiempo para que queden 25 gramos.
Solución:

$$25 = 200\left(\frac{1}{2}\right)^{t/15} \implies \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/15}$$

Como $1/8 = (1/2)^3$, igualamos bases:

$$3 = \frac{t}{15} \implies t = 45$$

Problema Resuelto 5: Tasa de Decaimiento Relativo

Enunciado: Resuelva para la masa original m_0 si $m(10) = 40$ y $k = -0{,}05$.
Solución: Modelo: $m(t) = m_0 e^{kt}$.

$$40 = m_0 e^{-0{,}05(10)} \implies 40 = m_0 e^{-0{,}5}$$

$$m_0 = \frac{40}{e^{-0{,}5}} = 40e^{0{,}5} \approx 65{,}95$$

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Fideicomiso a Largo Plazo

Contexto: Un fondo deposita $4000 bajo una tasa garantizada del 6 % anual capitalizable mensualmente. Determine el saldo consolidado después de exactamente 5 años.
Solución: Fórmula discreta con $P = 4000$, $r = 0{,}06$, $n = 12$, $t = 5$.

$$A = 4000\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12(5)} = 4000(1{,}005)^{60}$$

Calculando el factor: $(1{,}005)^{60} \approx 1{,}3488$. $A = 4000(1{,}3488) = 5395{,}40$. **Respuesta:** El saldo será $5395,40.

Aplicación 2: Proliferación Bacteriana

Contexto: Un cultivo microbiano arranca con 200 individuos. Si proliferan continuamente a una tasa relativa del 15 % por hora, calcule la población precisa al cabo de 8 horas.
Solución: Modelo continuo biológico: $N(t) = 200e^{0{,}15t}$. Sustituimos $t = 8$:

$$N(8) = 200e^{0{,}15(8)} = 200e^{1{,}2}$$

Evaluando la exponencial: $e^{1{,}2} \approx 3{,}320$. $N(8) = 200(3{,}320) = 664$. **Respuesta:** Habrá 664 bacterias.

Aplicación 3: Trazador Radiactivo

Contexto: Cierto isótopo hospitalario posee una vida media de 30 días. Si la dosis fabricada pesa 50 gramos, calcule la masa residual tras 90 días usando exponentes simples.
Solución: Modelo de vida media: $m(t) = 50(1/2)^{t/30}$. Sustituimos $t = 90$:

$$m(90) = 50\left(\frac{1}{2}\right)^{90/30} = 50\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$m(90) = 50\left(\frac{1}{8}\right) = 6{,}25$$

Respuesta: Quedarán 6,25 gramos exactos.

Aplicación 4: Censo de Reserva Natural

Contexto: Una especie protegida crece exponencialmente. Iniciaron 500 animales y se censaron 800 tras 4 años. Halle la constante relativa de reproducción anual.
Solución: Usamos $N(t) = 500e^{kt}$. En $t = 4$, $N = 800$.

$$800 = 500e^{4k} \implies 1{,}6 = e^{4k}$$

Tomamos logaritmo natural:

$$\ln(1{,}6) = 4k \implies k = \frac{\ln(1{,}6)}{4} \approx 0{,}1175$$

Respuesta: La constante relativa es 0,1175 (11,75 %).

PROFE TEO
Las poblaciones animales o bacterianas jamás dan números decimales. Si te sale 40.8 animales, redondea por sentido lógico a 40 o 41 dependiendo del contexto.

Aplicación 5: Depreciación de Activos

Contexto: Un servidor informático corporativo deprecia su valor continuamente un 12 % anual. Costando inicialmente \$1200, proyecte su avalúo residual transcurrida una década.
Solución: Decaimiento continuo: $V(t) = 1200e^{-0{,}12t}$. Evaluamos para $t = 10$:

$$V(10) = 1200e^{-0{,}12(10)} = 1200e^{-1{,}2}$$

Evaluando $e^{-1{,}2} \approx 0{,}3012$. $V(10) = 1200(0{,}3012) = 361{,}43$. **Respuesta:** El avalúo será \$361,43.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Argumente algebraicamente por qué una tasa de interés del 5 % capitalizable continuamente siempre rinde ligeramente más que la misma tasa capitalizable mensualmente.
2. Un estudiante afirma que si la vida media de un isótopo es 10 años, entonces en 20 años desaparecerá por completo. Explique el error lógico de esta afirmación.
3. ¿Por qué la constante de desintegración k en el modelo $A = A_0 e^{kt}$ resulta ser un valor negativo para procesos de decaimiento radiactivo?
4. Si analizamos $A = P(1 + r/n)^{nt}$, ¿qué límite matemático ocurre internamente con la expresión entre paréntesis cuando la variable n (periodos) tiende al infinito?
5. Explique por qué el tiempo necesario para que un capital se triplique ($3P$) bajo interés continuo depende exclusivamente de la tasa r y no del capital inicial P.
6. En un modelo logístico biológico (que se frena por falta de recursos), ¿en qué etapa la curva se comporta casi idéntica al crecimiento exponencial e^{kt}?
7. Si la vida media se calcula como $h = \frac{\ln 2}{|k|}$, justifique geométricamente por qué se usa el logaritmo natural del número 2.
8. Cierto modelo inflacionario marca $1{,}04^t$. Convierta teóricamente esa base a un modelo continuo de base e. ¿Cuál sería el nuevo exponente k?
9. ¿Qué alteración gráfica sufre la curva $N(t) = N_0 e^{kt}$ si la condición inicial N_0 se duplica, manteniendo el mismo ritmo biológico k?
10. Al evaluar decaimientos milenarios como el Carbono-14, ¿por qué es inviable utilizar modelos polinomiales de grado negativo (t^{-2}) en lugar de exponenciales?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule A si $P = 2000$, $r = 0{,}08$ anual compuesto trimestralmente por $t = 3$ años.

Guía de Solución Interactiva

1. Periodos anuales trimestrales: $n =$ _____.
2. Reemplaza en $A = P(1 + r/n)^{nt}$: $A = 2000\left(1 + \frac{\_\_\_\_}{4}\right)^{4\cdot\_\_\_\_}$.
3. Opera el paréntesis: $A = 2000(\_\_\_\_)^{\_\_\_\_} \approx$ _____.

Problema 2. Halle k si $N(t) = 100e^{kt}$ y $N(5) = 400$.

Guía de Solución Interactiva

1. Iguala: $400 = 100e^{5k} \implies \_\_\_\_ = e^{5k}$.
2. Aplica logaritmo: $\ln(\_\_\_\_) = 5k$.
3. Despeja: $k = \frac{\ln(4)}{5} \approx$ ______.

Problema 3. Halle el tiempo para que 50g decaigan a 12,5g con vida media $h = 14$ días.

Guía de Solución Interactiva

1. Usa el modelo (1/2): $12{,}5 = 50\left(\frac{1}{2}\right)^{t/14} \implies \_\_\_\_ = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/14}$.
2. Convierte 0,25 a fracción base 1/2: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\_\_\_\_} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/14}$.
3. Iguala exponentes: $\_\_\_\_ = t/14 \implies t =$ _____.

PROFE TEO
Para la vida media, la fórmula $m = m_0(1/2)^{t/h}$ es directa. Si prefieres base e, tendrás que calcular primero $k = -\ln(2)/h$. ¡Usa la que te sea más rápida!

Problemas Generales

Problema 4. Calcule el monto de \$1500 al 4 % compuesto anualmente por 6 años.

Problema 5. Determine el interés continuo generado por \$800 al 5 % en 10 años.

Problema 6. Halle la tasa continua r requerida para triplicar un capital en 12 años.

Problema 7. Resuelva para t: $3000 = 1000e^{0,05t}$.

Problema 8. Una población es $P(t) = 50e^{0,2t}$. Halle t cuando $P = 150$.

Problema 9. Encuentre la vida media h si $k = -0,045$.

Problema 10. Calcule k si una muestra se reduce al 80 % en 5 horas.

Problema 11. Determine P inicial si el monto final continuo es \$5000, $r = 0,03$, $t = 4$.

Problema 12. Halle el saldo tras 2 años de \$100 al 12 % compuesto diariamente ($n = 365$).

Problema 13. Si $m(t) = m_0e^{-0,01t}$, ¿qué porcentaje queda en $t = 20$?

Problema 14. Halle el tiempo de vida media si una masa de 10g baja a 2g en 8 días.

Problema 15. Resuelva para r nominal compuesto mensualmente: \$200 $\rightarrow$ \$300 en 4 años.

Problema 16. Igualando ecuaciones: $100e^{0{,}04t} = 50e^{0{,}08t}$. Halle t.

Problema 17. Halle la masa inicial si en $t = 10$ años quedan 15g y $h = 30$ años.

Problema 18. Un capital al 6 % continuo y otro al 8 % continuo. ¿Cuándo se igualan si $P_1 = 3P_2$?

Problema 19. Aproxime k si la población se cuadruplica en 24 horas.

Problema 20. Resuelva analíticamente $P(1{,}05)^t = Pe^{rt}$ para hallar la tasa continua equivalente.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Cierto cultivo biológico de levadura crece continuamente. Si inicia con 100 células y su constante de reproducción es 0,08 por hora. Halle la población fúngica tras 5 horas de fermentación.

Guía de Solución Interactiva

1. Reconoce el modelo biológico: $N(t) = \_\_\_\_ e^{\_\_\_\_ t}$. 2. Inserta el lapso de fermentación: $N(5) = 100e^{0{,}08(\_\_\_\_)} = 100e^{\_\_\_\_}$. 3. Calcula el exponente final arrojando aproximadamente ____ células viables.

Problema 2. Un fideicomiso bursátil de \$2000 gana interés compuesto continuo al 4 % anual. Calcule el tiempo financiero estrictamente necesario para duplicar la inversión inicial asegurada.

Guía de Solución Interactiva

1. Formula la duplicación patrimonial: $4000 = 2000e^{\_\_\_\_ t}$, o simplemente $\_\_\_\_ = e^{0{,}04t}$. 2. Despeja aplicando logaritmo base e: $\ln(\_\_\_\_) = 0{,}04t$. 3. La división fraccionaria marca que tardará $\approx$ ____ años fiscales.

Problema 3. Un isótopo inestable mineral decae a una tasa continua del 2 % anual. Si hay 300 gramos resguardados, halle la masa remanente exacta tras 10 años radiométricos.

Guía de Solución Interactiva

1. Plasma el decaimiento radiométrico: $m(10) = 300e^{\_\_\_\_(10)}$. 2. Reduce el exponente atómico: $m(10) = 300e^{\_\_\_\_}$. 3. La masa inerte sobreviviente calculará un total de $\approx$ ____ gramos.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una campaña publicitaria viraliza impresiones web triplicándose cada semana. Iniciando con mil visualizaciones registradas, formule la ecuación de expansión y verifique la interacción esperada exactamente al mes (cuatro semanas).

Problema 5. El bosque conífero protegido alberga fauna reproduciéndose $P(a) = 450e^{0,06a}$. Pronostique el censo zoológico cuando la reserva silvestre cumpla su décimo aniversario fundacional.

Problema 6. Un submarino militar deprecia tecnología naval un nueve por ciento compuesto anualmente. Adquirido por ochenta millones, valore contablemente este navío estratégico en doce años sumergidos.

Problema 7. Cierta plaga fungicida asimila humedad expandiendo hectáreas bajo modelo continuo. Creció de diez a cincuenta acres en tres meses. Determine la constante relativa destructiva agrícola.

Problema 8. El flujo sanguíneo renal depura medicamento anestésico con vida media de dos horas. Tras inyectar doscientos miligramos hospitalarios, calcule la concentración residual analgésica aguantando siete horas postoperatorias.

Problema 9. La cristalización magmática subterránea solidifica minerales multiplicando volumen $V(h) = 5e^{0,12h}$ centímetros cúbicos. Precise horas geológicas requeridas para estancar trescientos centímetros endurecidos cristalizados.

Problema 10. Una aleación termo-metálica enfría drásticamente decaimiento exponencial perdiendo ocho por ciento calórico por minuto. Disipando desde mil grados centígrados, descubra el lapso tocando los quinientos grados templados.

Problema 11. Un nido entomológico subterráneo expande zánganos continuamente. Contando trescientos insectos iniciales y mil docientos en veinte días, halle la tasa exponencial colonizadora relativa.

Problema 12. La inflación deprime cierta criptomoneda emergente reduciendo su compra capitalizable mensualmente a un tres por ciento nominal. Resuelva el poder adquisitivo de cinco mil tokens tras cuarenta y ocho meses.

Problema 13. Un desecho tóxico industrial posee decaimiento continuo de cero punto cero cinco anual. Exija el periodo medioambiente seguro garantizando reducción al diez por ciento contaminante original.

Problema 14. La burbuja inmobiliaria infla condominios metropolitanos al siete por ciento compuesto continuo. Costando cien mil base, determine la plusvalía burbuja cotizada tras quince años urbanísticos especulativos.

Problema 15. Una floración algal tóxica contamina bahías duplicando biomasa cada quince días. Determine días de marea roja necesarios oscureciendo de cincuenta kilogramos base hasta dos toneladas masivas marinas.

Problema 16. La presión barométrica desciende escalando estratosfera marcando $1013e^{-0,12h}$ milibares. Aísle kilómetros altitudinales donde oxigenación aérea colapse apenas midiendo doscientos cincuenta milibares extremos.

Problema 17. El cátodo de baterías litio fuga miliamperios en reposo al uno por ciento compuesto semanal. Estime vida útil estática resguardando un celular mil miliamperios hasta quedar en seiscientos.

Problema 18. La neurociencia educativa demuestra retención memorística estudiantil decayendo $M = 100e^{-0{,}2d}$ porcentualmente por día. Compruebe fragmentos recordados lógicamente enfrentando un examen sorpresa tres días después.

Problema 19. El vector epidemiológico urbano infecta contagiados bajo $I(s) = 50e^{0{,}4s}$ semanas. Averigüe el aislamiento sanitario estricto cuando reportes registren sobre tres mil pacientes hospitalizados críticamente.

Problema 20. La fotosíntesis abismal filtra espectro lumínico perdiendo energía $\ln(L) = \ln(L_0) - 0{,}05m$ metros bajo oleaje. Despeje batimetría exacta suprimiendo luz al veinte por ciento base solar incidente oceánica.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $\approx \$2536{,}48$.
2. $k = \frac{\ln(4)}{5} \approx 0{,}277$.
3. $t = 28$ días.
4. $A = 1500(1{,}04)^6 \approx \$1897{,}98$.
5. $A = 800e^{0{,}5} \approx \$1318{,}98$. Interés: $\$518{,}98$.
6. $r = \frac{\ln 3}{12} \approx 0{,}0915$ ($9{,}15\,\%$).
7. $t = \frac{\ln 3}{0{,}05} \approx 21{,}97$.
8. $t = \frac{\ln 3}{0{,}2} \approx 5{,}49$.
9. $h = \frac{\ln 2}{0{,}045} \approx 15{,}40$.
10. $k = \frac{\ln(0{,}8)}{5} \approx -0{,}0446$.
11. $P = 5000e^{-0{,}12} \approx \$4434{,}59$.
12. $A = 100(1 + 0{,}12/365)^{730} \approx \$127{,}12$.
13. $e^{-0{,}2} \approx 0{,}8187 \implies 81{,}87\,\%$.
14. $h = \frac{8\ln 2}{\ln 5} \approx 3{,}44$ días.
15. $r \approx 12(1{,}5^{1/48} - 1) \approx 0{,}1016$ ($10{,}16\,\%$).
16. $t = \frac{\ln 2}{0{,}04} \approx 17{,}33$.
17. $m_0 = 15(2)^{1/3} \approx 18{,}90$g.
18. $t = \frac{\ln 3}{0{,}02} \approx 54{,}93$ años.
19. $k = \frac{\ln 4}{24} \approx 0{,}0577$.
20. $r = \ln(1{,}05) \approx 0{,}04879$.

Propuestos de Aplicación

1. 149 células aprox.
2. 17,33 años fiscales.
3. $\approx 245{,}6$ gramos remanentes.
4. $V(4) = 1000(3)^4 = 81000$ vistas.
5. $450e^{0{,}6} \approx 820$ animales.
6. $80(0{,}91)^{12} \approx 25{,}8$ millones.
7. $k = \ln(5)/3 \approx 0{,}536$ mensual.
8. $200(1/2)^{3{,}5} \approx 17{,}68$ mg.
9. $h = \ln(60)/0{,}12 \approx 34{,}12$ horas.
10. $t = \ln(0{,}5)/\ln(0{,}92) \approx 8{,}31$ minutos.
11. $k = \ln(4)/20 \approx 0{,}069$ diario.
12. $5000(1 - 0{,}03/12)^{48} \approx 4434$ tokens.
13. $t = \ln(0{,}1)/-0{,}05 \approx 46{,}05$ años.
14. $100ke^{1{,}05} \approx 285k \implies 185,765$ plusvalía.
15. $d = 15 \cdot \frac{\ln(40)}{\ln(2)} \approx 79{,}8$ días.
16. $h = \ln(250/1013)/-0{,}12 \approx 11{,}66$ km.
17. $s = \ln(0{,}6)/\ln(0{,}99) \approx 50{,}8$ semanas.
18. $100e^{-0{,}6} \approx 54{,}88\,\%$.
19. $s = \ln(60)/0{,}4 \approx 10{,}23$ semanas.
20. $m = \ln(0{,}2)/-0{,}05 \approx 32{,}19$ metros.

e^{rt}

¡Nivel Desbloqueado!

'El esfuerzo y la disciplina funcionan exactamente como el interés continuo. Cada pequeña acción diaria se suma a las anteriores, provocando un crecimiento exponencial en tu futuro.'

- El Poder del Tiempo

¡Excelente trabajo! Ahora eres capaz de modelar el comportamiento del dinero, la vida e incluso del universo utilizando el poder absoluto del número de Euler.

N_0

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com