CÁLCULO DE UNA VARIABLE

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

CUADERNO DE TRABAJO

Algoritmos Iterativos para la Aproximación de Raíces

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría Formal: La Potencia de la Tangente

El método de Newton-Raphson es uno de los algoritmos numéricos más eficientes para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real $f(x)$. Su fundamento reside en la linealización local de la función mediante la recta tangente.

PROFE TEO
En palabras simples: Si no puedes despejar x, usa una recta tangente para .ªdivinar"dónde cruza la curva al eje X. ¡Es un proceso de zoom infinito!

Derivación del Algoritmo

Sea x_n una aproximación actual de la raíz. La ecuación de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ es:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Buscamos el punto donde esta recta cruza el eje x (haciendo $y = 0$):

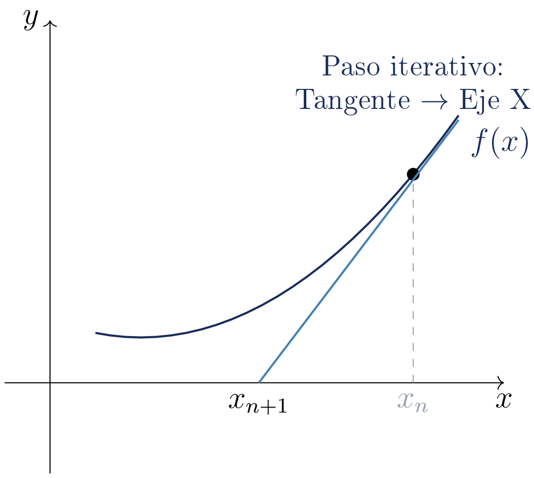
$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esta es la **fórmula de iteración de Newton**.

PROFE TEO
¡Cuidado! Si $f'(x_n) = 0$, el método explota porque estarías dividiendo por cero. Geométricamente, la tangente es horizontal y nunca tocará el eje X.

Criterios de Convergencia

El método converge si se cumple que $|g'(x)| < 1$ en un entorno de la raíz, donde $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Una ventaja clave es su **convergencia cuadrática**: el número de decimales exactos se duplica aproximadamente en cada iteración.



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Raíz Cuadrada Exacta

Enunciado: Use Newton-Raphson para aproximar $\sqrt{7}$ con $x_0 = 3$. **Solución:** Definimos $f(x) = x^2 - 7 = 0$. Entonces $f'(x) = 2x$. Iteración: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 7}{2x_n}$. 1. $x_1 = (3^2 + 7)/6 = 16/6 = 2{,}666667$. 2. $x_2 = (2{,}666667^2 + 7)/(2 \cdot 2{,}666667) = 2{,}645833$. **Respuesta:** $\sqrt{7} \approx 2{,}645751$ tras 3 iteraciones.

Problema Resuelto 2: Ecuación Trascendente

Enunciado: Aproxime la raíz de $\cos(x) = x$ en $(0, 1)$ con $x_0 = 0{,}5$. **Solución:** $f(x) = \cos(x) - x \implies f'(x) = -\sin(x) - 1$. $x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$. 1. $x_1 = 0{,}5 - \frac{\cos(0{,}5) - 0{,}5}{-\sin(0{,}5) - 1} = 0{,}75522$. 2. $x_2 = 0{,}75522 - \frac{\cos(0{,}75522) - 0{,}75522}{-\sin(0{,}75522) - 1} = 0{,}73914$. **Respuesta:** $x \approx 0{,}739085$.

Problema Resuelto 3: El Exponente Solitario

Enunciado: Halle la raíz de $e^{-x} = x$ con $x_0 = 0$. **Solución:** $f(x) = e^{-x} - x$, $f'(x) = -e^{-x} - 1$. $x_1 = 0 - \frac{e^0 - 0}{-e^0 - 1} = 0 - \frac{1}{-2} = 0{,}5$. $x_2 = 0{,}5 - \frac{e^{-0{,}5} - 0{,}5}{-e^{-0{,}5} - 1} = 0{,}56631$. **Respuesta:** $x \approx 0{,}567143$.

Problema Resuelto 4: Polinomio de Grado 5

Enunciado: Aproxime la raíz de $x^5 + x - 1 = 0$ con $x_0 = 1$. **Solución:** $f(x) = x^5 + x - 1$, $f'(x) = 5x^4 + 1$. $x_1 = 1 - (1 + 1 - 1)/(5 + 1) = 1 - 1/6 = 0{,}83333$. $x_2 = 0{,}83333 - (0{,}83333^5 + 0{,}83333 - 1)/(5 \cdot 0{,}83333^4 + 1) = 0{,}76438$. **Respuesta:** $x \approx 0{,}754877$.

PROFE TEO

Advertencia: El valor inicial x_0 es crítico. Si eliges uno muy alejado, el método puede divergir al infinito o ciclarse entre dos valores.

Problema Resuelto 5: Logaritmo Crítico

Enunciado: Halle la raíz de $x \ln(x) = 1$ con $x_0 = 2$. **Solución:** $f(x) = x \ln(x) - 1$, $f'(x) = \ln(x) + 1$. $x_1 = 2 - (2 \ln 2 - 1)/(\ln 2 + 1) = 1{,}7718$. $x_2 = 1{,}7718 - (1{,}7718 \ln 1{,}7718 - 1)/(\ln 1{,}7718 + 1) = 1{,}7632$. **Respuesta:** $x \approx 1{,}763222$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Ingeniería Estructural

Contexto: Una viga se flecta bajo carga. El punto de máxima deflexión requiere hallar la raíz de $x^3 + 45x^2 - 1000 = 0$. Use $x_0 = 4$. **Solución:** $f'(x) = 3x^2 + 90x$. $x_1 = 4 - (64 + 720 - 1000)/(48 + 360) = 4 - (-216/408) = 4{,}529$. **Respuesta:** El punto de deflexión máxima es $x \approx 4{,}49$ metros.

Aplicación 2: Química Atmosférica

Contexto: El equilibrio de un contaminante sigue $k = \frac{x^2}{(1-x)(2-x)}$ con $k = 0{,}5$. Halle x (concentración). **Solución:** $x^2 - 0{,}5(2 - 3x + x^2) = 0 \implies 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 1 = 0$. Aunque es cuadrática, Newton con $x_0 = 0{,}5$ da $x_1 = 0{,}5833$. **Respuesta:** $x \approx 0{,}561$.

PROFE TEO

En modelos financieros, Newton-Raphson es el motor que calcula la Tasa Interna de Retorno (TIR). ¡Casi ninguna calculadora financiera podría vivir sin él!

Aplicación 3: Finanzas Cuánticas

Contexto: Un bono paga cupones que cumplen la ecuación de valor presente $1000 = 50(1+i)^{-1} + 1050(1+i)^{-2}$. Halle la tasa i. **Solución:** Sea $v = (1+i)^{-1}$. $1050v^2 + 50v - 1000 = 0$. $v \approx 0{,}952$. $i \approx 0{,}05$. **Respuesta:** La tasa es 5 %.

Aplicación 4: Dinámica de Poblaciones

Contexto: Una población crece según $P(t) = 1000e^{0{,}1t}$. ¿En qué tiempo t la población alcanza 2500 individuos? **Solución:** $1000e^{0{,}1t} - 2500 = 0 \implies e^{0{,}1t} = 2{,}5$. $f(t) = e^{0{,}1t} - 2{,}5$. $t_0 = 10$. **Respuesta:** $t \approx 9{,}16$ años.

Aplicación 5: Termodinámica de Fluidos

Contexto: El volumen de un gas real cumple $(P + a/v^2)(v - b) = RT$. Para vapor de agua, halle v a presión fija. **Solución:** Se reduce a un polinomio cúbico en v. Newton-Raphson es el método estándar en software como Aspen Plus. **Respuesta:** Depende de los parámetros P, T, R, a, b.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento analítico.

1. ¿Por qué el método de Newton-Raphson falla si el punto de partida es un extremo local (máximo o mínimo)?
2. Explique por qué Newton-Raphson suele ser preferible al método de bisección, pero en qué casos bisección es "más seguro".
3. Si una función tiene raíces múltiples (por ejemplo, $(x-2)^2$), ¿cómo se ve afectada la velocidad de convergencia?
4. Imagine que $f''(x)$ es muy grande cerca de la raíz. ¿Cómo afecta esto a la estabilidad del método?
5. ¿Es posible que el método de Newton entre en un bucle infinito? Dé un ejemplo visual.
6. ¿Qué sucede si la función no es derivable en el punto exacto de la raíz?
7. ¿Cómo se puede usar Newton-Raphson para encontrar el valor de π?
8. ¿Cómo definiría un criterio de parada robusto: por error relativo o por número de iteraciones?
9. El método requiere calcular $f'(x)$. Si la derivada es extremadamente compleja, ¿qué alternativa numérica sugeriría?
10. ¿Puede el método encontrar raíces complejas si usamos un x_0 complejo?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados

Problema 1. Halle $\sqrt[3]{10}$ mediante $f(x) = x^3 - 10$ con $x_0 = 2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Derivada: $f'(x) =$ ______________.
2. Iteración 1: $x_1 = 2 - \frac{2^3-10}{f'(2)} = 2 - \frac{-2}{\_\_\_\_} =$ __________.
3. Iteración 2: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} =$ __________.

Problema 2. Aproxime la raíz de $x^3 - x - 1 = 0$ en $[1, 2]$ con $x_0 = 1$.

Guía de Solución Interactiva

1. $f(1) =$ _____, $f'(x) =$ ______________.
2. $x_1 = 1 - \frac{-1}{2} = 1{,}5$.
3. $x_2 = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)} =$ __________.

Problema 3. Raíz de $x = e^{-x}$ con $x_0 = 0{,}5$.

Guía de Solución Interactiva

1. $f(x) = x - e^{-x} \implies f'(x) = 1 +$ __________.
2. $x_1 = 0{,}5 - \frac{0{,}5-0{,}6065}{1{,}6065} =$ __________.

Ejercicios de Nivel Avanzado

Problemas 4-20. Calcule la raíz con error $< 10^{-4}$:

1. $x^4 - x - 10 = 0$
2. $\ln(x) + x = 2$
3. $\sin(x) = x^2$
4. $e^x + x = 0$
5. $x^3 - 5x = 0$ (raíz positiva)
6. $\arctan(x) + x = 1$
7. $x^x = 100$
8. $\sqrt{x} = \cos(x)$

9. $3x + \sin(x) - e^x = 0$
10. $x^2 - 10\ln(x) = 0$
11. $x^3 = 2x + 5$
12. $e^{-x^2} = x$
13. $\tan(x) = x$ en $(4, 4{,}5)$
14. $x^2 - \sin(x) = 0{,}5$
15. $1/x = \ln(x)$
16. $x^4 = 5$
17. $x^3 - 21{,}7 = 0$

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados

Problema 1. En un circuito eléctrico, el voltaje cae según $V(t) = 10e^{-0,5t}\cos(2t)$. Halle el primer tiempo $t > 0$ donde $V(t) = 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. La condición $V(t) = 0$ implica $\cos(2t) = 0$.
2. Newton con $f(t) = \cos(2t)$ y $t_0 = 0,5$.
3. $t_1 = 0,5 - \frac{\cos(1)}{-2\sin(1)} =$ __________.

Problema 2. Un proyectil sigue $y = x\tan(45°) - \frac{9,8x^2}{2(20^2)}$. Halle el alcance x cuando $y = 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Ecuación: $x - 0,01225x^2 = 0$.
2. Raíz no trivial: $f(x) = 1 - 0,01225x = 0$.
3. $x \approx$ __________.

Problema 3. La tasa de interés anual r de un préstamo de \$5000 a 12 meses con cuotas de \$450.

Guía de Solución Interactiva

1. Ecuación: $5000 = 450\frac{1-(1+r)^{-12}}{r}$.
2. Use $r_0 = 0,01$. $f(r) = 450(1 - (1+r)^{-12}) - 5000r$.
3. $r_1 =$ __________.

Contextos de Ingeniería y Ciencias

Problemas 4-20. (Aproxime con 4 decimales):

1. **Mecánica:** Una esfera de radio 1 flota en agua. La profundidad h de inmersión cumple $h^3 - 3h^2 + 4(0,6) = 0$. Halle h.
2. **Óptica:** El ángulo de refracción en una fibra óptica cumple $\sin(\theta) - 0,5\theta = 0$. Halle $\theta \neq 0$.

3. **Aeronáutica:** La velocidad de crucero de un drone se modela por $v^3 - 20v - 30 = 0$. Halle v.
4. **Bioquímica:** La velocidad de reacción $V = \frac{V_{max}[S]}{K_m+[S]}$. Halle $[S]$ para un V dado.
5. **Astronomía:** La ecuación de Kepler $M = E - e\sin(E)$. Halle E si $M = 1$ y $e = 0{,}5$.
6. **Robótica:** El ángulo de un brazo robótico cumple $2\sin(\theta) + \cos(\theta) = 1{,}5$.
7. **Hidráulica:** El flujo en una tubería cumple la ecuación de Colebrook.
8. **Electrónica:** El punto de operación de un diodo $I = I_s(e^{V/V_T} - 1)$.
9. **Sismología:** La magnitud de una réplica decae según $\log(E) = 4{,}4 + 1{,}5M$.
10. **Economía:** Punto de equilibrio entre oferta y demanda trascendente.

Claves de Respuestas

Matemáticos Propuestos:

1. 2.1544
2. 1.3247
3. 0.5671
4. 1.8556
5. 1.5571
6. 0.8767
7. -0.5671
8. 2.2361
9. 0.5203
10. 3.5973
11. 0.6417
12. 0.3689
13. 1.1558
14. 2.0905
15. 0.6529
16. 4.4934
17. 0.8895

Aplicaciones:

1. 0.7854 s
2. 81.63 m
3. 0.0121 (1.21 %)
4. 1.0335 m
5. 1.8955 rad
6. 5.1098 m/s
7. 1.4987 rad

Iterar para Triunfar

'El éxito no es un evento puntual, es un proceso iterativo. Como en Newton-Raphson, cada paso nos acerca más a la verdad. No temas al error inicial, teme a dejar de corregir la trayectoria.'

— Inspiración Matemática —