PRECÁLCULO

TRIGONOMETRÍA
MEDICIÓN DE ÁNGULOS

CUADERNO DE TRABAJO

Grados, Radianes y Coterminales

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Lenguaje de la Rotación

Un ángulo se forma por la rotación de un rayo alrededor de su origen. En el plano cartesiano, un ángulo está en **posición estándar** si su vértice está en el origen y su lado inicial yace sobre el lado positivo del eje x.

PROFE TEO

¡Ojo a la dirección! Si giras en contra del reloj, tu ángulo es positivo. Si giras como las agujas del reloj, es negativo. ¡La dirección lo es todo!

1. Grados vs. Radianes

- **Grados (°):** Una revolución completa equivale a 360°. Por tanto, 1° es 1/360 de una vuelta completa.
- **Radianes (rad):** Un radián es la medida de un ángulo central que intercepta un arco cuya longitud es igual a la del radio del círculo ($s = r$). Una revolución completa mide 2π radianes.

Factor de Conversión: Como $180° = \pi$ rad, utilizamos:

De Grados a Radianes: Multiplicar por $\frac{\pi}{180°}$
De Radianes a Grados: Multiplicar por $\frac{180°}{\pi}$

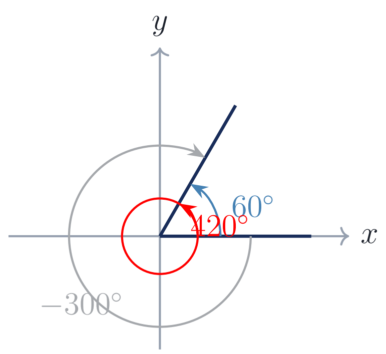
PROFE TEO

Si ves un ángulo sin el simbolito de grados (ej. $\theta = 2$), ¡asume SIEMPRE que está en radianes! Es la convención universal.

2. Ángulos Coterminales

Son ángulos en posición estándar que comparten los mismos lados inicial y terminal, aunque difieran en la cantidad o dirección de las rotaciones. Para encontrar ángulos coterminales, sumamos o restamos revoluciones completas:

- En grados: $\theta_{\text{coterminal}} = \theta \pm 360°n$ (donde n es un entero).
- En radianes: $\theta_{\text{coterminal}} = \theta \pm 2\pi n$ (donde n es un entero).



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Grados a Radianes

Enunciado: Convierta 210° a radianes en su forma exacta (fracción de π).
Solución: 1. Multiplicamos por el factor de conversión: $210^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$.
2. Simplificamos la fracción dividiendo entre 30°:

$$\frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$$

Respuesta: $\frac{7\pi}{6}$ radianes.

PROFE TEO
Al simplificar fracciones como 210/180, tacha los ceros primero. Te quedará 21/18, y ambos tienen tercia. ¡Mucho más rápido!

Problema Resuelto 2: Radianes a Grados

Enunciado: Convierta $-\frac{3\pi}{4}$ radianes a grados.
Solución: Multiplicamos por el factor de conversión invertido:

$$-\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Cancelamos π y dividimos 180° entre 4 (que es 45°):

$$-3 \cdot 45^\circ = -135^\circ$$

Respuesta: -135°.

Problema Resuelto 3: Coterminales en Grados

Enunciado: Encuentre un ángulo coterminal positivo y uno negativo para 115°.
Solución: 1. Para el positivo, sumamos una revolución: $115^\circ + 360^\circ = 475^\circ$.
2. Para el negativo, restamos una revolución: $115^\circ - 360^\circ = -245^\circ$.
Respuesta: 475° y -245°.

Problema Resuelto 4: Coterminales en Radianes

Enunciado: Halle un ángulo coterminal positivo menor a 2π para $\frac{17\pi}{3}$.
Solución: El ángulo es mucho mayor a una vuelta ($2\pi = \frac{6\pi}{3}$). Restaremos 2π iterativamente hasta entrar al rango $[0, 2\pi)$. $\frac{17\pi}{3} - 2\pi = \frac{17\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$. $\frac{11\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Como $\frac{5\pi}{3} < \frac{6\pi}{3}$, hemos terminado. **Respuesta:** $\frac{5\pi}{3}$.

Problema Resuelto 5: Expresión Mixta Avanzada

Enunciado: Evalúe $E = \frac{\theta_1}{\theta_2}$ si $\theta_1 = 150°$ y θ_2 es el coterminal positivo principal (menor a 1 vuelta) de $-\frac{\pi}{6}$.
Solución: 1. Convertimos θ_1 a radianes: $150° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{6}$. 2. Hallamos el coterminal de $-\frac{\pi}{6}$ sumando 2π: $-\frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Entonces $\theta_2 = \frac{11\pi}{6}$. 3. Dividimos: $E = \frac{5\pi/6}{11\pi/6} = \frac{5}{11}$. **Respuesta:** $E = 5/11$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Engranaje Industrial

Contexto: Un engranaje industrial gira a gran velocidad constante en una planta ensambladora. Si el sistema completó exactamente 4,5 revoluciones antes de frenar, calcule la medida del ángulo total descrito expresado en radianes exactos.
Solución: Una revolución equivale a 2π radianes. Multiplicamos la cantidad de vueltas por el valor de una vuelta: $\theta = 4{,}5 \cdot 2\pi = 9\pi$. **Respuesta:** El engranaje describió 9π radianes.

Aplicación 2: Rastreo de Antena

Contexto: Una antena de rastreo aéreo rota buscando señales. Durante una falla, el disco giró $-750°$. Determine un ángulo coterminal positivo estrictamente menor a una vuelta completa para recalibrar correctamente el sistema al mismo punto.
Solución: Sumamos $360°$ hasta que el ángulo sea positivo. $-750° + 360° = -390°$. $-390° + 360° = -30°$. $-30° + 360° = 330°$. **Respuesta:** El ángulo de recalibración es $330°$.

Aplicación 3: Péndulo de Reloj

Contexto: El péndulo de un reloj antiguo oscila barriendo un ángulo de $15°$ desde su posición extrema izquierda hasta su posición extrema derecha. Exprese esta amplitud angular en radianes utilizando una fracción simplificada para el registro del relojero.
Solución: Factor de conversión: multiplicar por $\pi/180°$. $\theta = 15° \cdot \frac{\pi}{180°}$. Dividimos ambos números entre 15: $\frac{15}{15} = 1$ y $\frac{180}{15} = 12$. **Respuesta:** $\frac{\pi}{12}$ radianes.

Aplicación 4: Brazo Robótico

Contexto: Un brazo robótico programado para soldar debe rotar su pinza principal $\frac{7\pi}{3}$ radianes. Para evitar que los cables internos se enreden, el ingeniero necesita el ángulo coterminal equivalente en el intervalo de $[0, 2\pi)$. Cálculelo.
Solución: Como $\frac{7\pi}{3} > 2\pi$ (ya que $2\pi = \frac{6\pi}{3}$), restamos una vuelta completa: $\frac{7\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. **Respuesta:** El brazo debe rotar $\frac{\pi}{3}$ radianes.

····▷
PROFE TEO
En los problemas físicos (volantes, llantas, radares), una revolución es una vuelta entera. Si gira hacia atrás o retrocede, el ángulo es negativo. ¡Usa la lógica de los signos!

Aplicación 5: Turbina Eólica

Contexto: Las aspas de un aerogenerador giran constantemente impulsadas por ráfagas intensas. Un sensor detecta una rotación negativa de $-\frac{11\pi}{4}$ radianes. Encuentre la medida en grados de su ángulo coterminal positivo más pequeño para el informe estructural.

Solución: Primero pasamos a grados: $-\frac{11\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = -11 \cdot 45° = -495°$. Sumamos 360° hasta llegar a positivo: $-495° + 360° = -135°$. $-135° + 360° = 225°$.

Respuesta: El reporte indicará 225°.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Argumente lógicamente por qué no tiene sentido sumar 180° para hallar un ángulo coterminal, obligándonos siempre a usar múltiplos de 360°.
2. ¿Qué diferencia geométrica existe entre un ángulo que mide 30° y otro que mide 390°, si ambos lados terminales caen exactamente en la misma posición?
3. Explique por qué el radián es una medida considerada .ªdimensional.ᵉⁿ física y matemáticas puras, a diferencia de los grados que son una unidad inventada.
4. Si un problema le entrega el ángulo $\theta = 5$ (sin símbolo de grados), ¿cuántas vueltas completas aproximadamente representa este valor en un círculo trigonométrico?
5. ¿Es matemáticamente posible que un ángulo posea infinitos ángulos coterminales tanto positivos como negativos? Justifique su respuesta.
6. Si la manecilla de los minutos de un reloj avanza 15 minutos, ¿cuál es el ángulo exacto en radianes que ha descrito, considerando el signo de rotación?
7. Al convertir 45° a radianes multiplicamos por $\pi/180$. ¿Qué propiedad algebraica justifica que esta operación no altere el valor real del ángulo?
8. ¿Por qué es un error común afirmar que el ángulo $-\frac{\pi}{2}$ es idéntico a $\frac{3\pi}{2}$ en todos los contextos matemáticos?
9. Si evaluamos el recorrido de la Tierra alrededor del sol en un día, ¿qué ángulo en grados barre aproximadamente nuestro planeta?
10. Un volante de automóvil se gira dos vueltas y media a la derecha. Exprese verbalmente el procedimiento para hallar este ángulo en radianes.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Convierta 150° a radianes en fracción exacta.

Guía de Solución Interactiva

1. Multiplica por el factor: $150^\circ \cdot \frac{\_\_\_\_\_}{180^\circ}$.
2. Cancela los ceros y divide ambos números entre _____.
3. La fracción simplificada es _______ radianes.

Problema 2. Halle el ángulo coterminal positivo principal de -80°.

Guía de Solución Interactiva

1. Como el ángulo es negativo, debemos sumar una vuelta que equivale a _____°.
2. Plantea la operación: $-80^\circ +$ _______°.
3. El resultado positivo es _______°.

Problema 3. Convierta $\frac{5\pi}{3}$ radianes a grados.

Guía de Solución Interactiva

1. Multiplica por el factor invertido: $\frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\_\_\_\_\_}$.
2. Cancela el término _____ del numerador y denominador.
3. Divide 180° entre 3 y multiplícalo por 5. Resultado: _____°.

PROFE TEO

Las fracciones con π asustan al principio. Un truco: 2π siempre será igual a $4\pi/2$, $6\pi/3$, $8\pi/4$, etc. Usa fracciones equivalentes para sumar y restar fácil.

Problemas Generales

Problema 4. Convierta 315° a radianes.

Problema 5. Convierta $\frac{7\pi}{4}$ a grados.

Problema 6. Halle un ángulo coterminal positivo y uno negativo para 65°.

Problema 7. Convierta -240° a radianes.

Problema 8. Encuentre el ángulo coterminal en $[0^\circ, 360^\circ)$ para 800°.

Problema 9. Convierta $-\frac{11\pi}{6}$ a grados.

Problema 10. Halle un coterminal positivo en $[0, 2\pi)$ para $\frac{19\pi}{4}$.

Problema 11. Determine si 45° y -315° son coterminales (justifique).

Problema 12. Halle el ángulo complementario de $\frac{\pi}{6}$ en radianes.

Problema 13. Reduzca 1500° al intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

Problema 14. Convierta 3 radianes a grados (use 1 rad $\approx 57{,}3^\circ$).

Problema 15. Halle el ángulo suplementario de $\frac{2\pi}{5}$ en radianes.

Problema 16. Encuentre dos ángulos coterminales negativos para $\frac{\pi}{2}$.

Problema 17. Convierta $-1080°$ a radianes y reduzca al coterminal principal.

Problema 18. Si $\theta = \frac{25\pi}{3}$, halle su coterminal negativo más cercano a cero.

Problema 19. Convierta $15°30'$ a radianes exactos.

Problema 20. Evalúe $\frac{\alpha}{\beta}$ donde $\alpha = 120°$ en rad. y β es el coterminal de $-\frac{7\pi}{4}$ en $[0, 2\pi)$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un motor paso a paso gira 3π radianes calibrando su eje direccional. Convierta este desplazamiento a grados para que el tablero electrónico detecte la posición.

Guía de Solución Interactiva

1. Utiliza el factor de conversión: $3\pi \cdot \frac{180^\circ}{\rule{1cm}{0.4pt}}$. 2. Se eliminan los valores con la letra _____. 3. Multiplicando lo sobrante se obtiene _____° de desplazamiento direccional.

Problema 2. Una cámara de seguridad barredora excedió su límite oscilando -120° durante un apagón. Identifique un ángulo coterminal positivo para restablecer su posición frontal vigilante original.

Guía de Solución Interactiva

1. Al ser un valor negativo, compensamos sumando la cantidad de _____°. 2. Estructuramos la operación aditiva: $-120^\circ +$ _____°. 3. El encuadre frontal positivo validado exigirá calibrarse exactamente a _____°.

Problema 3. El tambor centrífugo lavador completó dos revoluciones y media secando prendas pesadas. Convierta este giro absoluto a radianes para sincronizar los frenos electromagnéticos del electrodoméstico.

Guía de Solución Interactiva

1. Identificamos que una revolución entera significa _____ radianes matemáticos. 2. Planteamos el producto del giro por el valor revolucionario: $2{,}5 \times$ _____. 3.

El tambor generó un desplazamiento centrífugo frenado en _____ radianes.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una rueda hidráulica recolectora avanzó ciento treinta y cinco grados empujada por una corriente ribereña. Exprese el barrido hidromecánico utilizando radianes puros para registrar el caudal energético.

Problema 5. El dial de seguridad protegiendo una bóveda blindada giró negativamente cinco pi sextos radianes. Encuentre la equivalente posicional en grados permitiendo al cerrajero visualizar la muesca de apertura.

Problema 6. Un telescopio espacial escaneando constelaciones rotó mil grados continuos desde el inicio del barrido nocturno. Determine el ángulo coterminal menor a una vuelta ubicando su cuadrante galáctico actual.

Problema 7. La polea tractora de un teleférico alpino rodó diecisiete pi cuartos radianes tensionando cables. Reduzca este giro al intervalo principal radiano garantizando estabilización mecánica segura del remolque turístico.

Problema 8. El timón de navegación de un buque mercante describe cincuenta grados a estribor. Declare un ángulo negativo coterminal que simule una maniobra inversa agresiva alcanzando el mismo rumbo.

Problema 9. Una noria recreativa frenó tras rodar negativamente doscientos setenta grados perdiendo energía motriz. Halle radianes positivos equivalentes del menor recorrido necesario restaurando la cabina panorámica vacía superior.

Problema 10. El faro vigía costero rotó quince pi medios radianes barriendo horizontes nublados. Cuantifique cuántas revoluciones excedentes completó antes de detener su iluminación en el acantilado rocoso.

Problema 11. Un cañón de artillería eleva su caña setenta y dos grados fijando blanco lejano. Traduzca la altitud balística hacia formato de radianes fraccionarios para sincronizar el software de trayectoria.

Problema 12. El plato lector de un disco rígido patinó ochocientos ochenta grados dañado. Exija un ángulo coterminal dentro del giro básico localizando el sector corrompido del hardware magnético.

Problema 13. Un torno industrial taladrando aluminio describe rotaciones alcanzando treinta pi tercios radianes totales. Descifre la equivalencia angular en grados verificando fatiga del cabezal metálico afilado.

Problema 14. La hoja circular aserradora atravesó maderas cortando menos cinco pi tercios radianes. Encuentre su correspondencia positiva estandarizada para reprogramar el tope del sensor de seguridad infrarrojo.

Problema 15. Un giroscopio aeroespacial desvió estabilización marcando ciento diez grados negativos. Obtenga el coterminal positivo expresando radianes netos asegurando alineación inercial correcta en gravedad cero.

Problema 16. El rotor de un tocadiscos vintage retrocedió bruscamente novecientos quince grados arruinando una aguja musical. Filtre la rotación principal remanente diagnosticando la tracción mecánica averiada.

Problema 17. Una torreta defensiva blindada patrullando un perímetro giró veinticinco pi sextos radianes. Encuentre el ángulo negativo más próximo a cero rectificando la línea visual térmica velozmente.

Problema 18. La rueda de ruleta francesa patinó mecánicamente barriendo menos mil doscientos grados. Determine en qué ángulo positivo estándar frenó la bola marcando ganancia en el tapete lúdico.

Problema 19. El aspersor agrícola irrigando sembríos orbitó siete cuartos de revolución mojando tierras fértiles. Valore este desplazamiento convirtiendo radianes totales fraccionarios asegurando hidratación volumétrica homogénea.

Problema 20. Una bisagra automatizada rotó veintidós grados con treinta minutos trabándose inesperadamente. Convierta el defecto geométrico a radianes exactos calibrando biseles metálicos de repuesto precisos al milímetro.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $\frac{5\pi}{6}$ rad.
2. $280°$.
3. $300°$.
4. $\frac{7\pi}{4}$ rad.
5. $315°$.
6. $425°$ y $-295°$.
7. $-\frac{4\pi}{3}$ rad.
8. $80°$.
9. $-330°$.
10. $\frac{3\pi}{4}$.
11. Sí $(45° - (-315°) = 360°)$.
12. $\frac{\pi}{3}$.
13. $60°$.
14. $\approx 171{,}9°$.
15. $\frac{3\pi}{5}$.
16. $-\frac{3\pi}{2}$ y $-\frac{7\pi}{2}$.
17. -6π rad $\rightarrow$ coterminal 0 rad.
18. $-\frac{5\pi}{3}$ y $-\frac{11\pi}{3}$ (El más cercano es $\frac{\pi}{3}$, pero se pide negativo: el de $-\frac{5\pi}{3}$ no es coterminal directo si se requiere reducir. El coterminal negativo de $25\pi/3$ es $-\frac{5\pi}{3}$).
19. $\frac{31\pi}{360}$ rad.
20. $\frac{2\pi/3}{\pi/4} = \frac{8}{3}$.

Propuestos de Aplicación

1. $540°$.
2. $240°$.
3. 5π rad.
4. $\frac{3\pi}{4}$ rad.
5. $-150°$.
6. $280°$.
7. $\frac{\pi}{4}$ rad.
8. $-310°$.
9. $\frac{\pi}{2}$ rad $(90°)$.
10. 3 revoluciones (sobra $1{,}5\pi$).
11. $\frac{2\pi}{5}$ rad.
12. $160°$.
13. $1800°$.
14. $\frac{\pi}{3}$ rad.
15. $\frac{25\pi}{36}$ rad.
16. $165°$.
17. $-\frac{11\pi}{6}$ rad.
18. $240°$.
19. $\frac{7\pi}{2}$ rad.
20. $\frac{\pi}{8}$ rad.

360°

¡Ciclo Completado!

'No importa cuántas vueltas des o cuán lejos creas que has girado en sentido negativo. Siempre puedes sumar la rotación correcta para volver a un punto de partida brillante y positivo.'

- La Geometría de la Persistencia

¡Felicidades! Has dominado el lenguaje universal de los ángulos y la rotación. ¡Estás listo para conquistar los círculos trigonométricos!

2π

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com