$s = r\theta$

PRECÁLCULO

TRIGONOMETRÍA

ARCOS Y SECTORES

$\frac{1}{2}r^2\theta$

CUADERNO DE TRABAJO

Fórmulas, Velocidad Lineal y Angular

$v = \omega r$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Poder del Radián

El cálculo de medidas en un círculo es extremadamente simple, **siempre y cuando** utilicemos la unidad natural de los ángulos: el radián. Todas las fórmulas que veremos a continuación colapsan si usas grados.

PROFE TEO

¡Alerta roja! Si el problema te da el ángulo en grados ($30°, 45°$, etc.), el PASO 1 obligatorio es multiplicarlo por $\frac{\pi}{180}$ para pasarlo a radianes.

1. Longitud de Arco y Área de un Sector

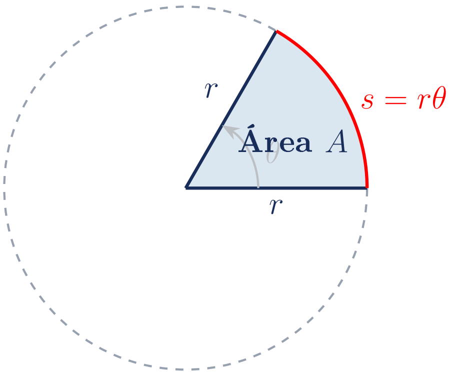
Dado un círculo de radio r y un ángulo central θ expresado **estrictamente en radianes**:

- **Longitud de Arco (s):** Es la distancia recorrida a lo largo del borde del círculo.

$$s = r \cdot \theta$$

- **Área del Sector Circular (A):** Es la superficie de la rebanada"de pizza.

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$



PROFE TEO

Las Revoluciones por Minuto (RPM) no son ω. Son "vueltas". Para hallar ω, debes multiplicar las RPM por 2π para convertir las vueltas a radianes.

2. Cinemática: Velocidad Lineal y Angular

Un objeto que se mueve en un círculo tiene dos velocidades conectadas entre sí:

- **Velocidad Angular (ω):** Mide qué tan rápido gira el ángulo. Su unidad es rad/s o rad/min.

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

- **Velocidad Lineal (v):** Mide qué tan rápido avanza el objeto por el borde (km/h, m/s).

$$v = \frac{s}{t}$$

- **Ecuación Puente:** Conecta el giro interno con el avance externo:

$$v = \omega \cdot r$$

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Cálculo Directo de Arco

Enunciado: Halle la longitud del arco interceptado por un ángulo central de 120° en un círculo de radio 6 cm.
Solución: 1. Convertimos el ángulo a radianes: $\theta = 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$ rad.
2. Aplicamos la fórmula $s = r\theta$:

$$s = 6 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi \text{ cm.}$$

Respuesta: La longitud del arco es 4π cm.

PROFE TEO
Si un problema te da el Área y el radio, y te pide la longitud de arco, puedes despejar θ primero o usar la fórmula combinada $A = \frac{1}{2}s \cdot r$.

Problema Resuelto 2: Área del Sector Circular

Enunciado: Un sector circular tiene un área de 15π m^2 y un radio de 5 m. Determine el ángulo central en radianes.
Solución: Usamos la fórmula del área $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ y sustituimos:

$$15\pi = \frac{1}{2}(5)^2\theta \implies 15\pi = \frac{25}{2}\theta$$

Despejamos θ:

$$\theta = \frac{15\pi \cdot 2}{25} = \frac{30\pi}{25} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad.}$$

Respuesta: El ángulo central es $\frac{6\pi}{5}$ radianes.

Problema Resuelto 3: Conversión de Velocidad Angular

Enunciado: Un volante gira a 45 RPM (Revoluciones Por Minuto). Exprese su velocidad angular ω en radianes por segundo (rad/s).
Solución: 1. Multiplicamos por 2π para pasar revoluciones a radianes: $\omega = 45 \cdot 2\pi = 90\pi$ rad/min.
2. Dividimos entre 60 para convertir los minutos a segundos:

$$\omega = \frac{90\pi}{60} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad/s.}$$

Respuesta: $\frac{3\pi}{2}$ rad/s.

Problema Resuelto 4: Ecuación Puente Cinemática

Enunciado: Una rueda de radio 40 cm gira con una velocidad angular de $\frac{\pi}{4}$ rad/s. Calcule la velocidad lineal de un punto en su borde exterior.
Solución: Utilizamos la ecuación puente que conecta la rotación con el avance lineal: $v = \omega r$. Sustituimos los valores directos:

$$v = \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 40 = 10\pi \text{ cm/s}.$$

Respuesta: La velocidad lineal es 10π cm/s.

Problema Resuelto 5: Poleas Conectadas

Enunciado: Dos poleas están unidas por una correa. La polea A tiene radio 10 cm y $\omega_A = 12$ rad/s. Si la polea B tiene radio 15 cm, ¿cuál es su ω_B?
Solución: El secreto en poleas conectadas es que comparten la misma correa, por ende, sus velocidades lineales en el borde son idénticas: $v_A = v_B$.

$$r_A \cdot \omega_A = r_B \cdot \omega_B$$

$$10 \cdot 12 = 15 \cdot \omega_B \implies 120 = 15\omega_B$$

$$\omega_B = \frac{120}{15} = 8 \text{ rad/s}.$$

Respuesta: La velocidad angular es 8 rad/s.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Péndulo de Reloj

Un péndulo metálico antiguo oscila libremente marcando un ángulo total de doce grados entre sus extremos. Sabiendo que la vara medidora principal posee sesenta centímetros de longitud geométrica, calcule la distancia absoluta de la trayectoria curva delineada por la plomada inferior.
Solución: Convertimos el ángulo: $\theta = 12^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{15}$ rad. Usamos $s = r\theta$, con $r = 60$: $s = 60\left(\frac{\pi}{15}\right) = 4\pi$ cm. **Respuesta:** La trayectoria curva es de 4π centímetros.

Aplicación 2: Limpiaparabrisas Frontal

El brazo articulado de un limpiaparabrisas mide cuarenta centímetros. Este mecanismo pivota barriendo tres cuartos de pi radianes limpiando el cristal sucio. Formule el área total barrida asumiendo que la cuchilla plástica cubre toda la longitud del brazo de soporte.
Solución: Área del sector: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. Datos: $r = 40$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$. $A = \frac{1}{2}(40)^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1600)\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 800\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. $A = 600\pi$. **Respuesta:** El área barrida es 600π cm^2.

Aplicación 3: Rueda de Ciclismo

Una rueda deportiva de veinticinco centímetros de radio gira alcanzando una rotación sostenida de ochenta radianes por minuto. Defina la velocidad de traslación del aro de carbono expresada en metros por segundo.
Solución: Radio $r = 25$ cm $= 0{,}25$ m. Angular $\omega = 80$ rad/min $= \frac{80}{60}$ rad/s $= \frac{4}{3}$ rad/s. Lineal $v = \omega r = \left(\frac{4}{3}\right)(0{,}25) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ m/s. **Respuesta:** Se traslada a 1/3 metros por segundo.

Aplicación 4: Plato Magnético

El sector defectuoso de un disco rígido almacena datos corrompidos. Abarca un ángulo radial de pi sextos. Considerando un radio sectorial de seis centímetros, dimensione el espacio magnético dañado superficialmente para reportar la pérdida física en bytes geométricos equivalentes.
Solución: Fórmula: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. Datos: $r = 6$, $\theta = \frac{\pi}{6}$. $A = \frac{1}{2}(6)^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}(36)\left(\frac{\pi}{6}\right) = 18\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\pi$. **Respuesta:** El espacio magnético dañado es 3π cm^2.

PROFE TEO
Las pistas de disco duro o lectores láser barren anillos, no sectores completos. Si te piden el área de una franja, debes restar el área del sector pequeño al área del sector grande.

Aplicación 5: Satélite Órbita Baja

Un satélite de telecomunicaciones sobrevuela orbitando a seiscientos radianes diarios terrestres. Su altitud sumada al núcleo planetario conforma un radio vector de diez mil kilómetros. Aísle la velocidad aerodinámica lineal satelital catalogada formalmente en kilómetros recorridos por hora.

Solución: Radio $r = 10000$ km. Angular $\omega = 600$ rad/día $= \frac{600}{24}$ rad/hora $=$ 25 rad/h. Velocidad $v = \omega r = 25(10000) = 250000$ km/h. **Respuesta:** Viaja a $250,000$ kilómetros por hora.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué la fórmula $s = r\theta$ pierde completamente su validez matemática si ingresamos el ángulo θ medido en grados sexagesimales?
2. Explique la diferencia física conceptual entre velocidad angular ω y velocidad lineal v al observar un punto en el borde de un CD girando.
3. Si dos hormigas corren en círculos concéntricos distintos (una en $r = 5$ y otra en $r = 10$) barriendo el mismo ángulo $\pi/2$ en el mismo tiempo, ¿quién corre más rápido linealmente y por qué?
4. Argumente algebraicamente cómo la fórmula del área del círculo completo ($A = \pi r^2$) es solo un caso especial de la fórmula del área del sector circular ($A = \frac{1}{2}r^2\theta$).
5. Un volante triplica su velocidad angular (ω). ¿Qué ocurre proporcionalmente con la velocidad lineal (v) de un clavo alojado en su borde exterior?
6. En un sistema de engranajes acoplados directamente, ¿por qué la rueda más pequeña está obligada a tener una velocidad angular mayor?
7. La relación $v = \omega r$ establece que v crece al aumentar r. ¿Significa que si alargo el brazo de un radar al infinito, su punta viajará a velocidad infinita? Explique la restricción física.
8. Si el área de un sector circular es constante, pero reducimos el ángulo a la mitad, ¿qué ajuste cuadrático debe sufrir el radio para compensarlo?
9. Demuestre dimensionalmente (usando unidades) que la ecuación $\omega = \frac{v}{r}$ arroja un resultado consistente en 1/tiempo, conocido como radián por segundo.
10. ¿Por qué es un error común usar RPM directamente en la fórmula de velocidad lineal $v = \omega r$? Identifique el factor de conversión omitido.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule la longitud de arco para $r = 8$ m y $\theta = 45°$.

Guía de Solución Interactiva

1. Convierte el ángulo a radianes: $45° \cdot \frac{\pi}{180°} =$ ________ rad.
2. Utiliza la fórmula base: $s = r \cdot \theta \implies s = 8 \cdot ($________$)$.
3. Simplifica la expresión final: $s =$ ________ m.

Problema 2. Halle el área del sector circular si $r = 10$ cm y $s = 5\pi$ cm.

Guía de Solución Interactiva

1. Emplea la fórmula alternativa del área: $A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot$ ________.
2. Reemplaza los datos entregados: $A = \frac{1}{2} \cdot (5\pi) \cdot ($________$)$.
3. Multiplica y obtiene el área superficial: $A =$ ________ cm^2.

Problema 3. Un motor gira a 120 RPM. Halle ω en rad/s.

Guía de Solución Interactiva

1. Pasa revoluciones a radianes: $120 \cdot$ ________$\pi = 240\pi$ rad/min.
2. Divide entre 60 para pasarlo a segundos: $\omega = \frac{240\pi}{\_\_\_\_\_\_\_\_}$.
3. Simplifica la fracción extrema: $\omega =$ ________ rad/s.

PROFE TEO

Las fracciones te harán la vida más fácil. Evita los decimales a menos que el problema de aplicación te exija aproximar la respuesta.

Problemas Generales

Problema 4. Calcule la longitud de arco si $r = 12$ cm y $\theta = 30°$.

Problema 5. Halle el área de un sector con $r = 6$ m y $\theta = \pi/3$ rad.

Problema 6. Encuentre el ángulo central θ en grados si $r = 5$ y $s = 5\pi$.

Problema 7. Halle la velocidad lineal v si $r = 4$ m y $\omega = 3\pi$ rad/s.

Problema 8. Convierta una rotación de 36 RPM a ω en rad/s.

Problema 9. Encuentre el radio r si el área sectorial es 20π y $\theta = \pi/2$.

Problema 10. Calcule s sabiendo que el área del sector es 24 cm^2 y $r = 6$ cm.

Problema 11. Halle ω si un punto recorre 15π m en 5 s con $r = 3$ m.

Problema 12. Dos engranajes están unidos. Engranaje A: $r = 8$, $\omega = 15$. Engranaje B: $r = 12$. Halle ω_B.

Problema 13. Si el minutero de un reloj mide 15 cm, halle la longitud de arco que barre en 20 minutos.

Problema 14. Halle la velocidad angular ω en rad/h del horario de un reloj estándar.

Problema 15. Un disco de radio 10 gira a 45 RPM. Halle v en su borde en cm/s.

Problema 16. Halle el área del trapecio circular entre $r_1 = 4$ y $r_2 = 6$ para un ángulo de $\pi/4$.

Problema 17. Si un auto viaja a 72 km/h y sus llantas tienen diámetro 80 cm, halle ω de las llantas en rad/s.

Problema 18. Un carrete de hilo de radio 2 cm se desenrolla tirando con $v = 10$ cm/s. Halle las RPM del carrete.

Problema 19. Compare las velocidades lineales de dos puntos en un disco de radio R: uno en el borde y otro a $R/2$.

Problema 20. Halle la longitud de arco y área del sector si $r = 5/\pi$ m y el ángulo es 180°.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Una rueda de feria turística mide diez metros radiales girando exactamente a un radián por segundo. Aísle analíticamente la distancia periférica lineal que desplazará cualquier cabina de pasajeros al transcurrir un lapso de cinco segundos.

Guía de Solución Interactiva

1. Plantea el modelo lineal directo combinando variables: $s = \omega \cdot r \cdot$ _____. 2. Substituye los valores dinámicos identificados: $s = (1) \cdot (10) \cdot (\_\_\_\_\_)$. 3. La distancia periférica recorrida arrojará _____ metros exactos.

Problema 2. El aspersor hidráulico agrícola dispersa agua irrigando un abanico de pi tercios radianes. Fijando un alcance presurizado de quince metros de radio, evalúe la superficie total cultivable humedecida reportada.

Guía de Solución Interactiva

1. Ejecuta la fórmula del sector agrícola: $A = \frac{1}{2}(\_\_\_\_\_)^2 \cdot \frac{\pi}{3}$. 2. Eleva la longitud de presión al cuadrado fraccionando: $A = \frac{1}{2}(\_\_\_\_\_) \cdot \frac{\pi}{3}$. 3. Operando las fracciones concluimos regando _______π metros cuadrados fértiles.

Problema 3. Un pozo artesanal extrae baldes girando una manivela cilíndrica de veinte centímetros. Extrayendo un metro de cuerda mojada verticalmente, determine el ángulo radial girado manualmente.

Guía de Solución Interactiva

1. Estandarizamos unidades fraccionando al metro: $r =$ _____ m. 2. Estructuramos la ecuación del arco estirado: $\theta = s/\_\_\_\_\_$. 3. El cociente directo 1/0,2 define _____ radianes torcidos manualmente.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un faro costero vigía rotativo barre ciento veinte grados iluminando acantilados. Su haz lumínico penetra doce kilómetros marinos. Valore los kilómetros cuadrados oceánicos escaneados protegiendo embarcaciones encalladas nocturnas.

Problema 5. El radar aeronáutico militar efectúa seis barridos perimetrales completos por minuto explorando. Traduzca este ritmo operativo defensivo catalogando su capacidad angular usando radianes estrictos por segundo rastreado.

Problema 6. La rebanada comercial de una pizza jumbo devela veinte centímetros radiales ocupando pi cuartos del cartón base. Verifique cuánta pasta calórica horneada engulle un comensal devorándola.

Problema 7. Un engranaje industrial fresado arrastra cincuenta dientes dentados girando veinte revoluciones. Calcule velocidad traslacional dentada si el disco fundido mide quince centímetros concéntricos calibrados fresando metal pesado.

Problema 8. El disco abrasivo pulidor gira violentamente a tres mil seiscientas rotaciones. Especifique rapidez angular mortífera radiana manejando la amoladora manual afilando cuchillas oxidadas.

Problema 9. Las hélices aerodinámicas de un dron cuatrimotor giran alcanzando ciento cincuenta radianes. Computar el avance lineal del plástico rebanando aire asumiendo un diámetro de diez centímetros voladores.

Problema 10. El neumático blindado de un camión pesado acelera marcando setenta y dos kilómetros horarios. Despeje revoluciones radiales llanta adentro soportando sesenta centímetros axiales radiales traccionados.

Problema 11. Un carrusel temático frena progresivamente deteniéndose tras orbitar trescientos radianes brutos. Establezca kilómetros mareados desplazados por los ponis perimetrales montados a diez metros del eje infantil.

Problema 12. La puerta giratoria acristalada de un lobby hotelero pivota pi sextos atrapando huéspedes. Mida metros lineales empujados vidriados si el marco frontal estira dos metros perimetrales.

Problema 13. Una centrifugadora sanguínea hospitalaria aísla plasma plasmando novecientas rotaciones. Condense la fuerza angular destructiva reportando rad/s precisos analizando tubos decantados.

Problema 14. El ventilador de techo hogareño sofoca calor operando cuchillas radiales de medio metro batiendo cinco radianes veloces. Calcule ráfaga perimetral lineal refrescando la habitación ventilada.

Problema 15. Una cuerda vaquera boleadora gira preparando lanzamiento a veinte metros por segundo. Estime la velocidad angular mortífera del nudo soga alojado a ochenta centímetros de la mano campera.

Problema 16. La ruleta azarosa del casino frena recorriendo setenta y dos grados últimos. Registre milímetros rodados por la esfera marfil brincando sobre la pista estriada de treinta centímetros.

Problema 17. Un brazo robótico automotriz pinza chasises desplazando su garra cincuenta centímetros. Evalúe radián articular manipulado sabiendo que la extensión electromecánica suma metro y medio calibrado.

Problema 18. La aguja de diamante del tocadiscos vintage surca vinilos recorriendo surcos giratorios. Precise velocidad lineal acústica al morder pistas lejanas a quince centímetros rodando treinta y tres RPM musicales.

Problema 19. El campanario colonial ostenta un péndulo de bronce gigante balanceándose quince grados simétricos. Calcule metros cuadrados aéreos oxidados invadidos midiendo un radio pendular de cinco metros suspendidos altitudinalmente.

Problema 20. La sierra circular maderera corta tablones disparando aserrín cortante cincuenta metros por segundo. Declare radio acerado dentado escondido protegiendo un motor revolucionado a cien radianes destructores continuos.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 2π m.
2. 25π cm^2.
3. 4π rad/s.
4. 2π cm.
5. 6π m^2.
6. $180°$.
7. 12π m/s.
8. $1{,}2\pi$ rad/s.
9. $4\sqrt{5}$ (o $\sqrt{80}$).
10. 8 cm.
11. π rad/s.
12. 10 rad/s.
13. 10π cm.
14. $\pi/6$ rad/h.
15. 15π cm/s.
16. $2{,}5\pi$ u^2.
17. 50 rad/s.
18. $\approx 47{,}7$ RPM ($150/\pi$).
19. Exterior es doble del interior ($v_1 = 2v_2$).
20. Arco: 5 m. Área: $12{,}5/\pi$ m^2.

Propuestos de Aplicación

1. 50 metros.
2. $37{,}5\pi$ m^2.
3. 5 radianes.
4. 48π km^2.
5. $\frac{\pi}{5}$ rad/s.
6. 50π cm^2.
7. 10π m/s (1000π cm/s).
8. 120π rad/s.
9. 7,5 m/s (750 cm/s).
10. $\frac{100}{3}$ rad/s.
11. 3 kilómetros (3000 m).
12. $\frac{\pi}{3}$ metros.
13. 30π rad/s.
14. 2,5 m/s.
15. 25 rad/s.
16. 120π milímetros.
17. 1/3 rad.
18. $16{,}5\pi$ cm/s ($0{,}55\pi$ m/s).
19. $\frac{25\pi}{24}$ m^2.
20. 0,5 metros (50 cm).

$r\theta$

¡Trayectoria Completada!

'La vida, como el radio de un círculo,
proyecta tu energía hacia el exterior.
Mientras más constante sea tu giro interno,
mayor será la velocidad con la que avanzarás
hacia tus metas.'

- La Dinámica del Radián

¡Formidable esfuerzo! Ahora tienes las herramientas para calcular y dominar el movimiento circular de cualquier mecanismo en el universo físico.

ωr

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com