CÁLCULO DE UNA VARIABLE

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

CUADERNO DE TRABAJO

Límites Notables y Demostraciones

$$\frac{1-\cos x}{x} \to 0$$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Los Pilares Trigonométricos

Cuando evaluamos funciones trigonométricas en $x = 0$, a menudo nos encontramos con la temida indeterminación $0/0$. Para sortear este obstáculo, el cálculo se apoya en dos límites notables fundamentales, cuya demostración nace de la pura geometría elemental.

PROFE TEO

¡Atención! Para que estos límites funcionen, la variable x **debe** estar en radianes. Si está en grados, la magia se rompe y el límite es diferente.

1. El Primer Límite Notable

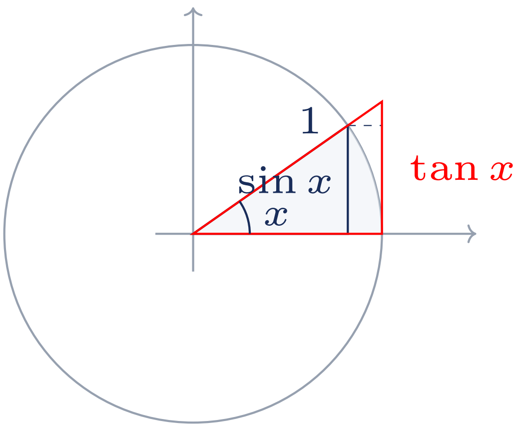
El límite trigonométrico más importante del cálculo establece que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Idea de la demostración geométrica: En un círculo trigonométrico de radio $r = 1$ con un ángulo $0 < x < \pi/2$: Área Triángulo Interno < Área Sector Circular < Área Triángulo Externo

$$\frac{\sin x \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

Al dividir entre $\frac{\sin x}{2}$ y aplicar el Teorema del Sándwich cuando $x \to 0$, llegamos a que $\frac{\sin x}{x} \to 1$.



2. El Segundo Límite Notable

A partir del primer límite, se deduce el segundo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Demostración Analítica: Multiplicamos por la conjugada: $\frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$. Usando $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = (1) \cdot \left(\frac{0}{1+1}\right) = 0$$

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Argumento Alterado

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x}$.
Solución: Necesitamos que el denominador sea idéntico al argumento del seno. Multiplicamos y dividimos por 4:

$$\lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{\sin(4x)}{4x} = 4 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{4x}$$

Haciendo $u = 4x$, si $x \to 0$, entonces $u \to 0$:

$$4 \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 4(1) = 4$$

····▷
PROFE TEO
Si tienes un argumento complejo como $\sin(5x)$, debes construir el $5x$ en el denominador. ¡Lo que está dentro del seno no se toca!

Problema Resuelto 2: Límite con Tangente

Enunciado: Determine $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(3x)}$.
Solución: Dividimos numerador y denominador entre x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan(5x)}{x}}{\frac{\sin(3x)}{x}}$$

Aplicamos el truco del argumento alterado multiplicando y dividiendo por constantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5 \cdot \frac{\tan(5x)}{5x}}{3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x}} = \frac{5(1)}{3(1)} = \frac{5}{3}$$

····▷
PROFE TEO
El límite de la tangente nace del seno. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Así que $\frac{\tan x}{x}$ también tiende a 1.

Problema Resuelto 3: El Cuadrado del Coseno

Enunciado: Evalúe $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.
Solución: Multiplicamos por la conjugada:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

Separamos los límites notables:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = (1)^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

····▷
PROFE TEO
¡Cambio de variable al rescate! Si x no tiende a 0 sino a π, inventa una nueva letra $u = x - \pi$ para forzar que $u \to 0$.

Problema Resuelto 4: Cambio de Variable

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$.
Solución: Sea $u = x - \pi$. Entonces $x = u + \pi$. Cuando $x \to \pi$, $u \to 0$. Reemplazamos en el límite:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u+\pi)}{u}$$

Usamos identidad trigonométrica $\sin(u+\pi) = -\sin u$:

$$\lim_{u\to 0} \frac{-\sin u}{u} = -1 \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = -1$$

Problema Resuelto 5: Identidades de Ángulo Doble

Enunciado: Evalúe $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\cos x-1}$.
Solución: Recordemos la identidad $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$. Sustituimos en el numerador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x - 2}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos^2 x - 1)}{\cos x - 1}$$

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} 2(\cos x + 1)$$

Evaluando $x = 0$, obtenemos $2(1 + 1) = 4$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Fuerza de Restauración

Contexto: Un péndulo ejerce una fuerza de restauración $F(\theta) = k\frac{\sin\theta}{\theta}$. Determine la tensión teórica del cable cuando el ángulo de deflexión θ se acerca a cero absoluto, asumiendo $k = 50$ Newtons.
Solución: Calculamos el límite $\lim_{\theta\to 0} 50\frac{\sin\theta}{\theta}$. Por límite notable, esto resulta en $50(1) = 50$. **Respuesta:** La tensión tiende a 50 Newtons.

Aplicación 2: Dispersión Láser

Contexto: Un láser emite fotones con un patrón de intensidad lumínica $I(x) = \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$, donde x es la dispersión angular. Halle la intensidad del núcleo central del láser cuando $x \to 0$.
Solución: Sea $u = 2x \implies x = u/2$. $\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{(u/2)^2} = \lim_{u\to 0} 4\left(\frac{1-\cos u}{u^2}\right) = 4(1/2) = 2$. **Respuesta:** La intensidad es 2 unidades lumínicas.

PROFE TEO
Las aplicaciones físicas de estos límites justifican por qué para ángulos pequeños $\sin(x) \approx x$. ¡Es el límite en acción!

Aplicación 3: Corriente Alterna

Contexto: El desfase de un motor eléctrico de inducción genera una eficiencia marginal dada por $\eta(t) = \frac{\tan(3t)}{2t}$. Calcule el pico de eficiencia mecánica en el milisegundo exacto de arranque ($t \to 0$).
Solución: Separamos constantes: $\lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan(3t)}{t}$. Multiplicamos y dividimos por 3: $\frac{3}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\tan(3t)}{3t} = \frac{3}{2}(1) = 1{,}5$. **Respuesta:** La eficiencia pico es 1.5.

Aplicación 4: Tolerancia de Engranajes

Contexto: La holgura milimétrica en un sistema de engranajes planetarios obedece a $H(\phi) = \frac{\sin^2(\phi)}{\phi^2+\phi^3}$. Identifique la tolerancia residual estructural cuando el ángulo de torsión ϕ decae infinitesimalmente.
Solución: Factorizamos el denominador: $\phi^2(1+\phi)$. Separamos: $\lim_{\phi\to 0} \left(\frac{\sin\phi}{\phi}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\phi}$. Evaluando: $(1)^2 \cdot (1/1) = 1$. **Respuesta:** La tolerancia residual límite es 1 milímetro.

Aplicación 5: Amortiguación Acústica

Contexto: Un panel insonorizado mitiga decibelios según la onda de impacto $D(w) = \frac{w \sin w}{1-\cos w}$. Estime el rebote acústico base frente a vibraciones de baja frecuencia asintótica ($w \to 0$).
Solución: Multiplicamos por conjugada: $\frac{w \sin w(1+\cos w)}{\sin^2 w} = \frac{w(1+\cos w)}{\sin w}$. Invertimos límite notable: $\left(\frac{w}{\sin w}\right)(1+\cos w) \to 1 \cdot (2) = 2$. **Respuesta:** El rebote base estabilizado es 2 decibelios.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué es matemáticamente inválido intentar evaluar $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ usando directamente las leyes algebraicas del cociente?
2. En la demostración del límite notable se establece que $\frac{\sin x \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$. ¿De dónde provienen geométricamente estas tres áreas?
3. Explique por qué el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ exige obligatoriamente que x esté medido en radianes y no en grados sexagesimales.
4. Si evaluamos el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$, ¿el resultado sigue siendo 1? Justifique usando el Teorema del Sándwich.
5. Describa la relación algebraica entre $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$ y la identidad de ángulo doble para el coseno.
6. Un alumno afirma que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k$ aplicando simplemente la regla de cancelar la x". Corrija este grave error de concepto.
7. ¿Qué estrategia de cambio de variable utilizaría si se le pide evaluar un límite trigonométrico cuando $x \to \pi/2$ para convertirlo en $u \to 0$?
8. Si la función $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, demuestre lógicamente por qué el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ hereda el valor de 1.
9. Al tener una expresión del tipo $\frac{x^2}{1-\cos x}$, ¿es posible invertir el límite de $\frac{1-\cos x}{x^2}$ para evaluarlo directamente? Justifique.
10. (Avanzado) Investigue brevemente el desarrollo en serie de Taylor para $\sin x$ y explique cómo este justifica algebraicamente que $\frac{\sin x}{x} \to 1$.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Multiplicamos y dividimos la fracción por la constante _____.
2. Reagrupamos la expresión: _____ $\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{7x}$.
3. Aplicamos el límite notable, resultando en $7 \cdot (\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$.

Problema 2. Halle $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Para emparejar el argumento, escribimos el denominador como _____x, multiplicando por 2 afuera.
2. La expresión queda: $2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\_\_\_\_\_x)}{2x}$.
3. Dado que $\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u} = \_\_\_\_\_$, el resultado final es _____.

Problema 3. Determine $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(4x)}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Dividimos numerador y denominador entre x: $\frac{\frac{\tan(3x)}{x}}{\frac{\sin(4x)}{x}}$.
2. Aplicamos la regla constante en el numerador obteniendo _____, y en el denominador _____.
3. El límite de la fracción completa resulta en _____.

PROFE TEO

¡Reparte la variable "x" equitativamente! Si tienes una división de dos trigonométricas, divide arriba y abajo entre "x".

Problemas Generales

Problema 4. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x)}{2x}$.

Problema 5. Evalúe $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin(10x)}$.

Problema 6. Halle $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x^2}$.

Problema 7. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(5x)}{x^2}$.

Problema 8. Resuelva $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$.

Problema 9. Encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)-\sin(2x)}{x^3}$. (Pista: Factorice tan).

Problema 10. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$.

Problema 11. Halle $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{x-\pi/2}$.

Problema 12. Evalúe $\lim_{x\to 0} \frac{x+\tan x}{\sin x}$.

Problema 13. Resuelva $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\sin(3x)}{4x^2}$.

Problema 14. Determine $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x^2-\pi^2}$.

Problema 15. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$. (Tenga cuidado con los límites laterales).

Problema 16. Evalúe $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$.

Problema 17. Halle $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{1-\cos(bx)}$.

Problema 18. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-\cos(7x)}{x^2}$.

Problema 19. Determine $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$.

Problema 20. Halle analíticamente $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{x-\pi/4}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un brazo robótico calibra su error de posicionamiento mediante $E(\alpha) = \frac{\sin(3\alpha)}{\alpha^2+\alpha}$. Evalúe rigurosamente la desviación remanente cuando el ángulo de articulación α busca la corrección total en cero.

Guía de Solución Interactiva

1. Factorizamos el denominador obteniendo $\alpha(\_\_\_\_\_)$. 2. Reagrupamos separando el límite: $\frac{\sin(3\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{1}{\_\_\_\_\_}$. 3. Evaluamos ambas partes para obtener $3 \cdot (\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$ milímetros.

Problema 2. La tensión térmica en una aleación aeroespacial fluctúa marcando $T(k) = \frac{1-\cos(4k)}{k^2}$ megapascales. Deduzca el esfuerzo cortante crítico justo al momento de anularse la dilatación termodinámica k.

Guía de Solución Interactiva

1. Usamos la fórmula para $\frac{1-\cos(ax)}{x^2}$, donde $a = \_\_\_\_\_$. 2. El resultado teórico general del límite es $\frac{a^2}{\_\_\_\_\_}$. 3. Sustituyendo el parámetro, el esfuerzo crítico resulta ser _____ megapascales.

Problema 3. El campo magnético de un levitador cuántico decae según $B(\phi) = \frac{\tan(2\phi)}{\sin(5\phi)}$. Proyecte asintóticamente la fuerza repulsiva magnética remanente al converger el flujo de partículas ϕ a inactividad absoluta.

Guía de Solución Interactiva

1. Dividimos todo el sistema entre la variable principal _____. 2. Resolvemos el numerador arrojando _____ y el denominador arrojando _____. 3. La constante de repulsión estabilizada resulta en la fracción _____.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La resistencia aerodinámica de un hiperauto en ráfagas laterales perfila $R(\theta) = \frac{\theta^2}{1-\cos(3\theta)}$. Determine el coeficiente de arrastre asintótico frontal si la turbulencia angular se reduce instantáneamente a cero grados.

Problema 5. El caudal de fluidos refrigerantes en un reactor decrece $F(t) = \frac{t-\sin(2t)}{t}$. Pronostique el margen volumétrico estancado en la tubería cuando el cronómetro de emergencia detiene el flujo cerrándose en cero.

Problema 6. La densidad ósea asimilada bajo terapias de ultrasonido reporta ganancias $G(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$. Valide la cota límite regenerativa cuando el espectro frecuencial x se aproxima al hercio unitario crítico.

Problema 7. Un puente atirantado oscila bajo vientos huracanados $O(v) = \frac{\cos(v)-1}{v\sin v}$. Especifique el margen de micro-fractura inminente cuando la fuerza eólica mengua abruptamente hacia cero sostenido.

Problema 8. El crecimiento exponencial de una cepa viral se estabiliza midiendo $C(d) = \frac{\sin(4d^2)}{d^2}$. Indique el factor epidemiológico remanente endémico cuando la exposición intercelular d colapsa.

Problema 9. Una red óptica de fibra refracta señales de encriptación $R(s) = \frac{\tan^2(3s)}{s^2}$. Establezca el índice de transmisión de datos perdidos evaluando la convergencia al silenciar el servidor.

Problema 10. La entropía financiera de una bolsa de valores colapsa calculando $V(p) = \frac{\sin(p)\cos(p)}{p}$. Determine el nivel de volatilidad congelada proyectado justo al instante de suspender las cotizaciones.

Problema 11. Un acelerador de hadrones registra inercia residual $I(m) = \frac{\sin(m-\pi/2)}{2m-\pi}$. Especifique el remanente inercial de la partícula al empujar su masa cerca de la constante fase de media pi.

Problema 12. El desfase fotográfico de un telescopio satelital genera distorsiones $D(\gamma) = \frac{1-\cos(\sqrt{2}\gamma)}{\gamma^2}$. Defina la nitidez óptica límite compensada al anularse las microvibraciones espaciales γ.

Problema 13. La corrosión galvánica en tuberías salinas avanza midiendo desgaste $C(a) = \frac{a^3}{\tan(a)-\sin(a)}$. Pronostique algebraicamente el tope de oxidación milimétrica considerando alcalinidades ínfimas tendientes a cero.

Problema 14. Un sismógrafo piezoeléctrico decodifica fallas tectónicas $S(t) = \frac{\sin(t^2-4)}{t-2}$. Compruebe el umbral de alerta sísmica remanente si la métrica de tiempo inter-placas marca exactamente dos nanosegundos.

Problema 15. La tasa fotosintética de una microalga híbrida acelera $P(l) = \frac{l^2 \sin(1/l)}{\tan(l)}$. Evalúe la saturación clorofílica final impuesta cuando los lúmenes de irradiación l se extinguen gradualmente al vacío.

Problema 16. Las turbinas jet sufren cavitación hídrica $K(w) = \frac{\sin(w)-\sin(2w)}{w}$. Determine el coeficiente acústico de golpe de ariete originado en el vórtice fluido cercano a inmovilidad.

Problema 17. Un isótopo de polonio pierde radioactividad γ escalando $E(\tau) = \frac{1-\sec(2\tau)}{\tau^2}$. Calcule el espectro energético seguro al estabilizar la desintegración cuántica hacia latencia.

Problema 18. La elasticidad de un polímero nanotecnológico rinde $E(\epsilon) = \frac{\sin(\pi\epsilon)}{\epsilon}$. Asegure la tenacidad de tracción máxima esperada cuando el nivel de tensión molecular tiende al punto de relajación.

Problema 19. La capacitancia de un micro-condensador descarga pulsos $C(q) = \frac{q\tan(5q)}{1-\cos(q)}$. Demuestre el amperaje eléctrico parasitario latente tras purgar el almacenamiento energético al mínimo físico permisible.

Problema 20. La asimilación celular en terapia génica acota $A(v) = \frac{\sin(\sin(2v))}{3v}$. Proyecte el radio de curación asintótico garantizado limitando el flujo virológico sintético hacia concentración neutra inicial.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 7.
2. 2.
3. 3/4.
4. 4.
5. 1/2.
6. 9.
7. 25/2.
8. 2.
9. 4.
10. 0.
11. -1.
12. 2.
13. 3/2.
14. $-1/(2\pi)$.
15. No existe (laterales $\pm 1/\sqrt{2}$).
16. $-\pi$.
17. a^2/b^2.
18. 20.
19. 1.
20. $\sqrt{2}$.

Propuestos de Aplicación

1. 3 milímetros.
2. 8 megapascales.
3. 2/5 repulsión.
4. 2/9 arrastre.
5. -1 volumen.
6. $-\pi$ regeneración.
7. $-1/2$ fractura.
8. 4 endémico.
9. 9 datos perdidos.
10. 1 volatilidad.
11. 1/2 inercia.
12. 1 nitidez.
13. 2 milímetros.
14. 4 alerta.
15. 0 saturación.
16. -1 coeficiente.
17. -2 espectro.
18. π tenacidad.
19. 10 amperaje parasitario.
20. 2/3 curación asintótica.

$\sin(x) \approx x$

¡Límite Superado!

'La geometría encierra secretos profundos. Al acercarnos al origen, las curvas complejas se vuelven simples líneas rectas. Encuentra la simplicidad en el caos.'

- La armonía de las funciones trigonométricas

¡Misión cumplida! Has domesticado las identidades trigonométricas y estás oficialmente listo para adentrarte en el mundo de las derivadas.

1

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com