CÁLCULO DE UNA VARIABLE

LÍMITES
LATERALES

CUADERNO DE TRABAJO
Análisis Direccional y Teorema de Existencia

Prof. Teófilo Teves
www.teoteves.com

Teoría: Los Dos Caminos hacia un Punto

Hasta ahora asumíamos que al acercarnos a un valor $x = a$, la función se dirigía a un único destino L. Sin embargo, el mundo real está lleno de cortes, saltos abruptos y decisiones binarias. Aquí es donde nacen los **límites laterales**.

1. Definiciones Formales

Límite por la Izquierda: Si $f(x)$ se acerca a L_1 cuando x se aproxima a a tomando valores *menores* que a, escribimos:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

Límite por la Derecha: Si $f(x)$ se acerca a L_2 cuando x se aproxima a a tomando valores *mayores* que a, escribimos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

PROFE TEO

Imagina que dos personas caminan hacia el mismo punto a desde lados opuestos. Si no se encuentran frente a frente en la misma altura, ¡el límite general no existe!

2. Teorema de Existencia del Límite

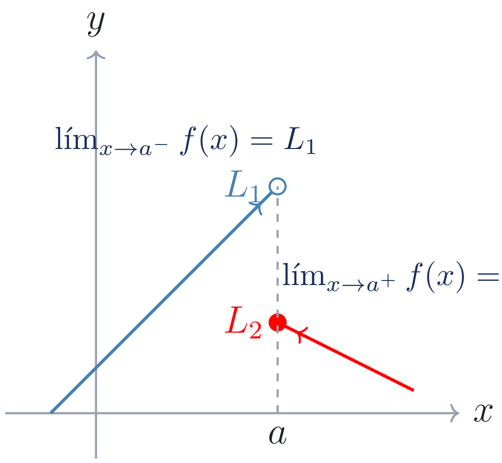
El límite ordinario (o bilateral) de una función $f(x)$ cuando $x \to a$ existe **si y solo si** los límites laterales existen y son exactamente iguales.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, decimos que el límite general **no existe** (y se produce un "salto.$^{\text{en}}$ la gráfica).

PROFE TEO

Las funciones a trozos y los valores absolutos son los sospechosos habituales. ¡Siempre que los veas, separa tu análisis en derecha e izquierda!



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Función a Trozos Continua

Enunciado: Sea $f(x) = \{2x+1 \text{ si } x \leq 3\,;\, x^2-2 \text{ si } x > 3\}$. Determine si $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe.
Solución: 1. Límite izquierdo ($x \to 3^-$ implica $x < 3$): $\lim_{x\to 3^-}(2x+1) = 2(3)+1 = 7$. 2. Límite derecho ($x \to 3^+$ implica $x > 3$): $\lim_{x\to 3^+}(x^2-2) = (3)^2-2 = 7$. **Conclusión:** Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 7$, el límite general **existe** y vale 7.

Problema Resuelto 2: El Salto del Valor Absoluto

Enunciado: Evalúe los límites laterales y el general para $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.
Solución: Recordemos que $|x-2| = x-2$ si $x > 2$, y $|x-2| = -(x-2)$ si $x < 2$. Derecha: $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(1) = 1$. Izquierda: $\lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(-1) = -1$. **Conclusión:** Como $1 \neq -1$, el límite general **no existe** ($\nexists$). Hay un salto unitario.

PROFE TEO
El valor absoluto $|x-a|$ es como un interruptor: se vuelve $(x-a)$ si te acercas por la derecha, y $-(x-a)$ si te acercas por la izquierda.

Problema Resuelto 3: Asíntota Vertical

Enunciado: Determine los límites laterales de $f(x) = \frac{1}{x-4}$ en $x = 4$.
Solución: Al evaluar $x = 4$ obtenemos $1/0$, lo que indica infinito. Evaluamos el signo: Derecha ($x \to 4^+$): Valores como 4,1 $\implies \frac{1}{4{,}1-4} = \frac{+}{+} \implies +\infty$. Izquierda ($x \to 4^-$): Valores como 3,9 $\implies \frac{1}{3{,}9-4} = \frac{+}{-} \implies -\infty$. **Conclusión:** El límite no existe, la función diverge en direcciones opuestas formando una asíntota vertical impar.

Problema Resuelto 4: Función Máximo Entero

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor$ y $\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor$.
Solución: La función $\lfloor x \rfloor$ (o parte entera) devuelve el mayor entero menor o igual a x. Izquierda ($x \to 1^-$): Tomamos valores como $x = 0{,}9, 0{,}99$. Su parte entera es 0. Límite = 0. Derecha ($x \to 1^+$): Tomamos valores como $x = 1{,}1, 1{,}01$. Su parte entera es 1. Límite = 1. **Conclusión:** Los laterales difieren. El límite general en cualquier número entero no existe para esta función.

PROFE TEO
Las raíces cuadradas con radicandos negativos simplemente "mueren". ¡No puedes sacar límite lateral si la función ni siquiera existe de ese lado!

Problema Resuelto 5: Límites en la Frontera del Dominio

Enunciado: Evalúe $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ analizando sus laterales.
Solución: El dominio de $\sqrt{x}$ es $[0,\infty)$. Derecha ($x \to 0^+$): Nos acercamos con valores positivos. $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$. Izquierda ($x \to 0^-$): Nos acercaríamos con negativos, pero $\sqrt{x}$ no está definida en $\mathbb{R}$ para $x < 0$. Este límite no existe. **Conclusión:** El límite ordinario no existe (estrictamente hablando), solo posee límite por la derecha.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Tarifario Eléctrico

Contexto: El cobro por megavatio hora es $C(x) = \{50x \text{ si } x \leq 100\,;\, 40x + 1000 \text{ si } x > 100\}$. Analice si el costo es continuo (si el límite existe) justo al rebasar el umbral de los 100 MWh.
Solución: Izquierda: $\lim_{x\to100^-} 50(100) = 5000$. Derecha: $\lim_{x\to100^+} 40(100) + 1000 = 5000$. **Respuesta:** El límite existe y es 5000. No hay salto tarifario brusco en el cobro.

Aplicación 2: Fricción Dinámica vs Estática

Contexto: El coeficiente de fricción de un bloque al empujarse se modela como $F(v) = \frac{|v|}{v} \cdot 0{,}5$ para una velocidad v. Determine matemáticamente la transición de fricción al pasar de retroceso a avance en $v = 0$.
Solución: Avance ($v \to 0^+$): $\lim \frac{v}{v}(0{,}5) = 0{,}5$. Retroceso ($v \to 0^-$): $\lim \frac{-v}{v}(0{,}5) = -0{,}5$. **Respuesta:** Hay una inversión instantánea y discontinua de la fuerza, saltando de -0.5 a 0.5. El límite no existe.

Aplicación 3: Presión de Válvula

Contexto: La presión en atmósferas de una caldera se libera mediante $P(t) = \{t^2 + 1 \text{ si } t < 3\,;\, 15 - t \text{ si } t \geq 3\}$ donde t son minutos. Indique si ocurre una caída abrupta de presión en $t = 3$.
Solución: Antes ($t \to 3^-$): $\lim(3)^2 + 1 = 10$ atm. Después ($t \to 3^+$): $\lim 15 - (3) = 12$ atm. **Respuesta:** Existe una descompensación (salto), el límite no existe y la presión brinca de 10 a 12 instantáneamente.

PROFE TEO
Siempre que un contexto indique çambio de estado"(como agua hirviendo), ¡espera ver matemáticas a trozos evaluadas con laterales!

Aplicación 4: Cambio de Fase Térmica

Contexto: La capacidad calorífica de un superconductor al enfriarse cerca del cero absoluto se modela por $C(T) = \frac{T-2}{\sqrt{(T-2)^2}}$. Evalúe el comportamiento asintótico cuando la temperatura se acerca a $T = 2$ Kelvin.
Solución: Notemos que $\sqrt{A^2} = |A|$. La función es $C(T) = \frac{T-2}{|T-2|}$. Derecha: límite es $+1$. Izquierda: límite es -1. **Respuesta:** La capacidad térmica sufre un colapso cuántico, con un límite lateral divergente de 1 a -1. No existe.

Aplicación 5: Latencia de Transmisión

Contexto: La pérdida de paquetes en un ruteador obedece a $L(x) = \frac{2x^2-8}{x-2}$ milisegundos, para cargas de tráfico $x \neq 2$. Compruebe si la latencia proyectada diverge o es evitable evaluando los laterales.
Solución: Factorizamos: $\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 2(x+2)$. Derecha: $\lim_{x\to2^+} 2(2+2) = 8$. Izquierda: $\lim_{x\to2^-} 2(2+2) = 8$. **Respuesta:** Ambos laterales coinciden en 8. El límite existe; es una falla evitable, no un salto permanente.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Si una función no está definida en $x = a$, ¿es esto un impedimento absoluto para que sus límites laterales en dicho punto existan?

2. Argumente algebraicamente por qué evaluar un límite que contiene el término $\frac{|x|}{x}$ en $x = 0$ obliga matemáticamente al uso de límites laterales.

3. Si el $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ y el $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$, ¿se puede afirmar, según la definición estricta, que el límite general existe y es ∞?

4. Visualice la gráfica de la función escalón unitario. ¿Qué característica geométrica dictamina la no existencia del límite en cada número entero?

5. Un compañero afirma que $\lim_{x\to 3} \sqrt{x-3} = 0$. Basándose en el dominio de la función, corrija esta aseveración técnica.

6. En una función definida a trozos de tres partes, si queremos evaluar el límite en un punto de transición, ¿debemos usar la regla de la tercera parte distante?

7. Describa un escenario físico (ej. cinemática) donde un límite lateral por la derecha represente un evento real y el límite izquierdo carezca de sentido físico.

8. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, ¿garantiza esto obligatoriamente que $f(a)$ asuma el mismo valor? Justifique con el concepto de discontinuidad.

9. Si evaluamos $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$, ¿el resultado arroja infinito positivo o negativo? Detalle el análisis de los signos involucrados.

10. ¿Por qué el criterio de existencia del límite es una herramienta fundamental antes de intentar aplicar la regla de L'Hôpital o cualquier derivación en puntos críticos?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle los límites laterales y determine si existe $\lim_{x\to 4} f(x)$, siendo $f(x) = \{x+2 \text{ si } x<4\,;\, x^2-10 \text{ si } x \geq 4\}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos la izquierda usando la regla superior: $\lim_{x\to 4^-}(x+2) = 4+2 =$ _____.

2. Evaluamos la derecha usando la regla inferior: $\lim_{x\to 4^+}(x^2-10) = 4^2-10 =$ _____.

3. Como $L_1 =$ _____ y $L_2 =$ _____, concluimos que el límite general _______________.

Problema 2. Evalúe $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{|x-3|}$ y $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{|x-3|}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Por la izquierda ($x<3$), el valor absoluto arroja signo negativo: $|x-3| =$ _______. El límite es $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{-(x-3)} =$ _____.

2. Por la derecha ($x>3$), arroja signo positivo: $|x-3| =$ _______. El límite es $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} =$ _____.

3. Debido a la diferencia, el límite general es _______________.

Problema 3. Analice el comportamiento asintótico de $\lim_{x\to 2} \frac{5}{x-2}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Por la derecha ($x \to 2^+$), elegimos $x = 2{,}01$. La fracción queda $\frac{5}{\text{positivo}} \implies$ _____∞.

2. Por la izquierda ($x \to 2^-$), elegimos $x = 1{,}99$. La fracción queda $\frac{5}{\text{negativo}} \implies$ _____∞.

3. Al tener divergencias de signo opuesto, existe una asíntota vertical impar y el límite _______________.

PROFE TEO

Las fracciones con denominador cero requieren análisis de signos. Un 0,0001 positivo o negativo hace la diferencia entre el cielo ($+\infty$) y el infierno ($-\infty$).

Problemas Generales

Problema 4. Para $f(x) = \{3x \text{ si } x < 1; 5 - x^2 \text{ si } x > 1\}$, evalúe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Problema 5. Calcule $\lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|}$ y $\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|}$.

Problema 6. Halle el valor de k para que el límite exista: $f(x) = \{kx+1 \text{ si } x \leq 2; x^2 + k \text{ si } x > 2\}$.

Problema 7. Determine los laterales en $x = 0$ para $g(x) = \frac{1}{x^2}$. ¿Existe el límite?

Problema 8. Analice si existe $\lim_{x\to 5} \frac{|x^2-25|}{x-5}$.

Problema 9. Si $\lfloor x \rfloor$ es la función parte entera, calcule $\lim_{x\to 4{,}5} \lfloor x \rfloor$.

Problema 10. Calcule los laterales en $x = 0$ de $f(x) = e^{1/x}$.

Problema 11. Halle $\lim_{x\to 1} f(x)$ si $f(x) = \{x^3 - 1 \text{ si } x \leq 1; \ln(x) \text{ si } x > 1\}$.

Problema 12. Evalue los laterales en $x = \pi/2$ para $y = \tan(x)$.

Problema 13. Determine el límite general de $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ cuando $x \to 2^+$.

Problema 14. Halle el valor de a y b para que el límite exista en 1 y 3: $f(x) = \{2 \text{ si } x \leq 1; ax + b \text{ si } 1 < x < 3; -2 \text{ si } x \geq 3\}$.

Problema 15. Calcule $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{|x|}$.

Problema 16. Analice el límite en $x = 3$ de $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ sabiendo que $f(3) = 10$.

Problema 17. Para la función signo $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$, evalúe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$.

Problema 18. Calcule $\lim_{x\to 2^+}(x - \lfloor x \rfloor)$ y compárelo por la izquierda.

Problema 19. Evalúe los laterales de $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ en $x = 1$.

Problema 20. Halle $\lim_{x\to 0} x\frac{|x|}{x}$ justificando con laterales.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un dron restringe su altitud por zonas $A(x) = \{15x \text{ si } x < 2; x^2 + 26 \text{ si } x \geq 2\}$. Compruebe matemáticamente si el vuelo sufre un brinco brusco al cruzar el paralelo 2.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos la zona previa al paralelo ($x \to 2^-$): $\lim 15(2) =$ _____. 2. Evaluamos la zona posterior ($x \to 2^+$): $\lim (2)^2 + 26 =$ _____. 3. Como los límites son _____, el vuelo es continuo y _______________.

Problema 2. Una cepa bacteriana detiene su consumo de glucosa a 5 grados: $C(T) = \frac{|T-5|}{T-5}$. Determine los límites de la tasa de consumo cuando la temperatura se acerca a 5 desde ambos extremos térmicos.

Guía de Solución Interactiva

1. Enfriamiento ($T \to 5^+$): $\lim \frac{T-5}{T-5} =$ _____. 2. Calentamiento ($T \to 5^-$): $\lim \frac{-(T-5)}{T-5} =$ _____. 3. La tasa de consumo sufre un salto, por lo que el límite _______________.

Problema 3. La válvula hidráulica bloquea presión de salida $P(v) = \frac{10}{v-4}$. Evalúe si existe un peligro inminente de explosión asintótica cuando el volumen interior se aproxima a la capacidad crítica de cuatro litros exactos.

Guía de Solución Interactiva

1. Llenado ($v \to 4^-$): $\frac{10}{\text{negativo}} \to$ _____. 2. Sobrepaso ($v \to 4^+$): $\frac{10}{\text{positivo}} \to$ _____. 3. Divergencia lateral comprobada, el límite general __________, indicando ruptura inminente.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una turbina hidroeléctrica genera energía $E(t) = \{3t^2 \text{ si } t \leq 1; 4t - 1 \text{ si } t > 1\}$. Confirme si el flujo energético se mantiene estable y sin interrupciones en el primer segundo operacional.

Problema 5. Un algoritmo bursátil dispara ventas masivas modeladas por $V(p) = \frac{|p-100|}{p-100}$. Calcule los límites de volumen accionario al acercarse al umbral crítico de los cien dólares. Analice el salto resultante.

Problema 6. El sónar de un batiscafo ajusta su frecuencia $F(d) = \{\sin(d)/d \text{ si } d < 0; 1 \text{ si } d > 0\}$. Demuestre si existe continuidad en la transmisión al rebasar el nivel del mar base cero.

Problema 7. Un líquido indicador químico altera su índice reflectivo $I(p) = 2 + \frac{p-7}{|p-7|}$. Determine analíticamente el salto óptico instantáneo que experimenta la sustancia al cruzar el pH siete neutro.

Problema 8. La tensión metálica de un cable para elevador es $T(c) = \frac{100}{c-5}$. Evalúe mediante límites laterales el riesgo catastrófico de tensión infinita al aproximar la carga a cinco toneladas métricas.

Problema 9. El consumo del propulsor espacial obedece la regla $C(x) = \{x^3 - 8 \text{ si } x < 2; \ln(x-1) \text{ si } x \geq 2\}$. Compruebe rigurosamente la existencia del límite en la etapa dos de despegue.

Problema 10. Un lente telescópico refracta fotones marcando $\lfloor d \rfloor$ dioptrías según la distancia focal d. Establezca si existe una graduación uniforme progresiva o saltos escalonados al evaluar el límite en distancias focales enteras como tres milímetros.

Problema 11. La velocidad del procesador conmuta su reloj $R(T) = \frac{T^2-16}{T-4}$ al calentarse. Determine a qué hercios apunta la latencia si la temperatura térmica del silicio roza los cuatro grados sin alcanzar restricciones mecánicas.

Problema 12. La amplitud de onda sísmica fractura el terreno según $W(t) = e^{1/t}$. Analice la magnitud asintótica izquierda y derecha cerca del impacto primario en cero segundos para prevenir derrumbes.

Problema 13. Cierto reactor atómico enfría su núcleo $N(x) = \{kx + 5 \text{ si } x < 3; x^2 - k \text{ si } x > 3\}$. Halle algebraicamente la constante k obligatoria para anular fluctuaciones límite en el minuto tres.

Problema 14. La señal fotónica de fibra óptica sufre atenuación $S(L) = \frac{\cos(L)-1}{L}$. Determine el impacto límite de la intensidad lumínica cuando la longitud residual del cableado se contrae infinitamente a cero milímetros.

Problema 15. Las compuertas de una represa limitan el desfogue volumétrico $V(h) = \{2h^2 + 1 \text{ si } h \leq 2; 3h + 3 \text{ si } h > 2\}$. Evalúe la transición de caudal a dos metros de apertura.

Problema 16. Un asteroide ejerce campo gravitacional $G(r) = \frac{-GM}{r^2}$. Deduzca las consecuencias del análisis lateral físico y matemático si el radio orbital disminuye progresivamente aproximándose hacia el implacable centro de masa absoluto.

Problema 17. La transmisión viral epidémica en cuarentena marca $E(d) = \{100(0{,}5)^d \text{ si } d < 1; 50 \text{ si } d > 1\}$. Confirme la efectividad continua del límite al completar el primer día de encierro.

Problema 18. Cierta red neuronal artificial satura sus nodos usando $N(x) = \arctan(1/x)$. Determine la polaridad del aprendizaje algorítmico al recibir un estímulo positivo cercano a cero y contrástelo con su reflejo negativo inferior.

Problema 19. Una aleación soporta desgaste corrosivo $D(a) = \frac{|a^2-9|}{a-3}$. Analice minuciosamente la tasa de erosión metálica cuando la fricción se aproxima al crítico punto tres desde parámetros inferiores y parámetros superiores.

Problema 20. El espín de una partícula cuántica arroja $S(t) = \frac{|t-2|}{t-2}$. Calcule los límites laterales cuando el tiempo se aproxima a dos nanosegundos y justifique la viabilidad física de la transición subatómica observada.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $L_1 = 6$, $L_2 = 6$. Existe, es 6.
2. $-(x-3)$, -1. $(x-3)$, 1. No existe.
3. $+\infty$, $-\infty$. No existe.
4. $L_1 = 3, L_2 = 4$. No existe.
5. Izq: -1. Der: 1.
6. $k = 3$.
7. Izq: $+\infty$, Der: $+\infty$. (Existe como ∞).
8. Izq: -10, Der: 10. No existe.
9. 4. (Es continua en no enteros).
10. Izq: 0, Der: $+\infty$.
11. $L_1 = 0, L_2 = 0$. Existe, es 0.
12. Izq: $+\infty$, Der: $-\infty$.
13. 0. (Solo existe por la derecha).
14. $a = -2, b = 4$.
15. -1.
16. 6. (El valor en el punto no importa).
17. No existe (salto -1 a 1).
18. Der: 0. Izq: 1.
19. Izq: $-\infty$, Der: $+\infty$.
20. 0. (Laterales 0 y 0).

Propuestos de Aplicación

1. 30, 30, iguales, no hay salto.
2. 1, -1, no existe.
3. $-\infty$, $+\infty$, no existe.
4. $L_1 = 3, L_2 = 3$. Estable.
5. Venta masiva $(+1)$ a caída (-1).
6. $L_1 = 1, L_2 = 1$. Sí existe.
7. De índice 1 a índice 3.
8. $+\infty$ tensión (ruptura).
9. $L_1 = 0, L_2 = 0$. Existe en despegue.
10. Escalones fijos, límite no existe en 3.
11. A 8 hercios.
12. Izq: 0, Der: $+\infty$.
13. $3k + 5 = 9 - k \implies k = 1$.
14. 0 atenuación límite.
15. $L_1 = 9, L_2 = 9$. Transición continua.
16. Diverge a $-\infty$ gravitatorio.
17. $L_1 = 50, L_2 = 50$. Efectividad continua.
18. $+\pi/2$ (positivo), $-\pi/2$ (negativo).
19. Izq: -6, Der: 6. Desgaste crítico.
20. Izq: -1, Der: 1. Salto cuántico, no existe.

¡Llegaste a la Meta!

'No importa si vienes por la izquierda o por la derecha, lo verdaderamente importante es que ambos caminos de tu esfuerzo converjan en el mismo nivel de éxito.'

- La prueba de existencia personal

¡Felicidades! Has aprendido a analizar cada punto crítico desde todas sus perspectivas, una habilidad fundamental no solo para el cálculo avanzado, sino para la toma de decisiones.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com