

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

# LÍMITES INFINITOS

CUADERNO DE TRABAJO  
Asíntotas Verticales y Divergencia

$$x = a$$

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

## Teoría: El Crecimiento Sin Límite

Existen funciones que, al aproximarse la variable  $x$  a un valor particular  $a$ , sus imágenes  $f(x)$  crecen de forma descontrolada (ya sea hacia valores positivos gigantes o hacia valores negativos extremadamente profundos). Este fenómeno matemático se conoce como **límite infinito**.

### 1. Definición Analítica

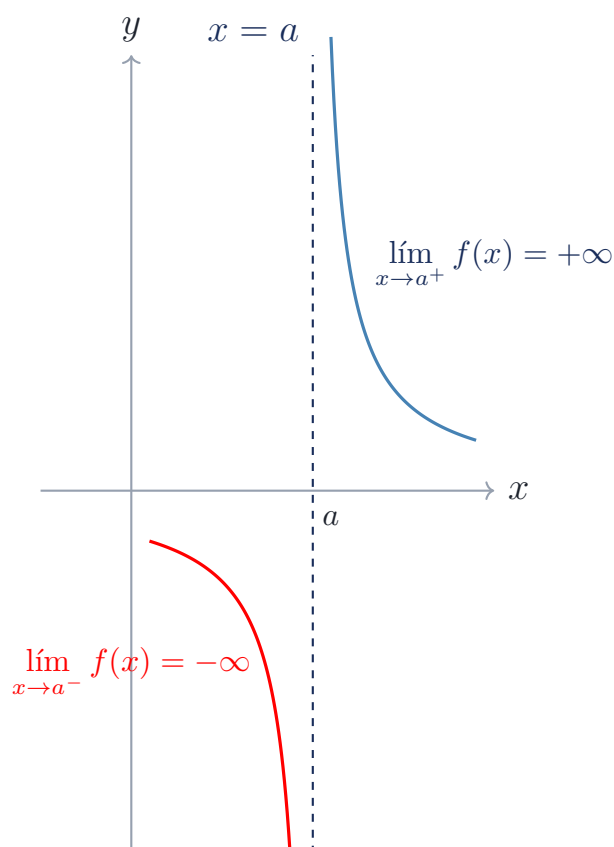
Decimos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  si podemos hacer que  $f(x)$  sea tan grande como queramos tomando valores de  $x$  suficientemente cerca de  $a$  (por ambos lados), pero sin ser iguales a  $a$ . Similarmente para  $-\infty$ . En la práctica, esto ocurre cuando al evaluar el límite llegamos a la forma **Constante No Nula dividida entre Cero** ( $\frac{K}{0}$ ).

### 2. Asíntotas Verticales

La recta vertical de ecuación  $x = a$  se denomina **asíntota vertical** de la curva  $y = f(x)$  si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

(O sus correspondientes versiones con  $-\infty$ ).



.... ▷

#### PROFE TEO

¡Atento aquí! Cuando decimos que un límite es  $\infty$ , en realidad estamos afirmando que **el límite no existe**. El símbolo  $\infty$  solo describe el *comportamiento* de la divergencia.

.... ▷

#### PROFE TEO

¡Un cero en el denominador no siempre es una asíntota vertical! Si al evaluar te da  $0/0$ , podría ser un simple hueco removible. ¡Siempre factoriza primero!

## Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: El Polo Simple

**Enunciado:** Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$ .

**Solución:** Al evaluar directamente con  $x = 3$ , obtenemos  $\frac{6}{0}$ . Como es una constante sobre cero, el límite es infinito. Analizamos el signo evaluando un valor de prueba muy cercano por la derecha, como  $x = 3,01$ :

$$\text{Signos: } \frac{2(3,01)}{3,01 - 3} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

Por lo tanto, el comportamiento direccional es positivo:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty$ .

....▷

### PROFE TEO

Si el denominador está elevado a una potencia par (como un cuadrado), el resultado inferior siempre será positivo. ¡Esto facilita enormemente el análisis de signos!

### Problema Resuelto 2: Denominador al Cuadrado

**Enunciado:** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{(x-1)^2}$ .

**Solución:** Evaluamos:  $\frac{-5}{0}$ . Como el denominador está al cuadrado, para cualquier valor cercano a 1 (sea por la izquierda como 0,99 o por la derecha como 1,01), el término  $(x-1)^2$  siempre será positivo.

$$\text{Signos laterales: } \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

Como ambos laterales convergen en el mismo comportamiento divergente, concluimos:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{(x-1)^2} = -\infty$ .

### Problema Resuelto 3: Asíntota vs. Hueco

**Enunciado:** Determine las asíntotas verticales de  $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-2x-8}$ .

**Solución:** Primero factorizamos el denominador para hallar los candidatos a asíntotas:  $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) = 0 \implies x = 4, x = -2$ . Evaluamos en  $x = 4$ :  $\frac{16-16}{0} = \frac{0}{0}$ . (Hueco removible, no es asíntota). Evaluamos en  $x = -2$ :  $\frac{4-16}{0} = \frac{-12}{0}$ . (Constante sobre cero, sí es asíntota). **Conclusión:** La única asíntota vertical está en  $x = -2$ .

### Problema Resuelto 4: Funciones Logarítmicas

**Enunciado:** Encuentre  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$ .

**Solución:** La función logaritmo natural  $\ln(x)$  solo está definida para  $x > 0$ . A medida que  $x$  toma valores fraccionarios cada vez más cercanos a cero (ej.  $1/10, 1/100, 1/e^{10}$ ), el valor del logaritmo se vuelve un número negativo inmensamente grande. Por definición de la función elemental:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

El eje  $Y$  ( $x = 0$ ) es su asíntota vertical.

**Problema Resuelto 5: Polos Trigonométricos**

**Enunciado:** Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x)$ .

**Solución:** Recordemos que  $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Cuando  $x$  se acerca a  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ), el  $\sin(\pi/2) \rightarrow 1$  y el  $\cos(\pi/2) \rightarrow 0$ . Obtenemos  $\frac{1}{0}$ . Analizamos por la izquierda (ej.  $89^\circ$  o cuadrante I), donde tanto el seno como el coseno son positivos.

$$\text{Signos: } \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ .

.....▷

**PROFE TEO**

Las funciones trigonométricas tienen infinitas asíntotas verticales. ¡Imagina la tangente como infinitas rebanadas que apuntan al cielo y al infierno en cada ciclo!

## Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Relatividad Especial

**Contexto:** La masa de una partícula subatómica aumenta según  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ . Halle el límite de la masa relativista cuando la velocidad  $v$  del objeto se aproxima a la velocidad de la luz  $c$  por la izquierda.

**Solución:** Evaluamos  $\lim_{v \rightarrow c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ . Al sustituir  $v = c$ , el denominador se vuelve  $\sqrt{1-1} = 0^+$ . La expresión queda  $m_0/0^+$ . **Respuesta:** El límite diverge a  $+\infty$ . La masa se vuelve teóricamente infinita.

### Aplicación 2: Falla de Condensador

**Contexto:** El voltaje en un condensador defectuoso con resistencia variable obedece a  $V(R) = \frac{24}{R}$ . Evalúe algebraicamente la tensión asintótica destructiva en el instante preciso en que la resistencia del circuito tiende a anularse completamente (cortocircuito).

**Solución:** Evaluamos  $\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{24}{R}$ . (La resistencia física solo puede ser positiva). El cociente toma la forma  $\frac{24}{0^+}$ . **Respuesta:** El voltaje tiende a  $+\infty$ , quemando el sistema instantáneamente.

### Aplicación 3: Costo de Erradicación

**Contexto:** El costo para filtrar toxinas de un pozo hidrográfico obedece la función  $C(p) = \frac{150p}{100-p}$ . Determine el límite financiero del costo logístico cuando el porcentaje de limpieza deseado se acerca al cien por ciento desde niveles inferiores.

**Solución:** Planteamos  $\lim_{p \rightarrow 100^-} \frac{150p}{100-p}$ . El numerador tiende a 15000. El denominador a  $0^+$  (ej.  $100 - 99,9 = 0,1 > 0$ ). **Respuesta:** El límite es  $+\infty$ . Es financieramente imposible lograr la purificación total.

### Aplicación 4: Óptica y Aumento Visual

**Contexto:** La magnificación focal de una lente bi-convexa convergente dicta la relación  $M(d) = \frac{f}{f-d}$ . Calcule la magnificación límite asintótica si la distancia del objeto  $d$  se aproxima al foco óptico  $f$  retrocediendo desde una distancia menor.

**Solución:** Calculamos  $\lim_{d \rightarrow f^-} \frac{f}{f-d}$ . Como  $d < f$ , entonces  $f - d$  será un número positivo muy cercano a cero ( $0^+$ ). **Respuesta:** La magnificación es  $+\infty$ , generando una imagen virtual enormemente amplificada.

....▷

### PROFE TEO

Las barreras absolutas físicas, como la velocidad de la luz o el cero absoluto, matemáticamente se representan casi siempre como asíntotas verticales.

**Aplicación 5: Resonancia Acústica**

**Contexto:** La intensidad estructural vibrante sometida a frecuencias externas proyecta  $I(w) = \frac{K}{|w-w_0|}$ . Defina el comportamiento de la intensidad de onda cuando la frecuencia sonora forzada roza inexorablemente la frecuencia natural de quiebre del material.

**Solución:** Buscamos  $\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{K}{|w-w_0|}$ . El valor absoluto asegura que el denominador siempre sea un cero positivo ( $0^+$ ) por cualquier lateral. **Respuesta:** La intensidad se va a  $+\infty$ , provocando el colapso por resonancia.

## Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Argumente lógicamente por qué la notación  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  implica, en términos estrictos de convergencia, que el límite en realidad no existe.
2. Si al evaluar una función racional obtenemos el resultado numérico  $0/0$ , ¿es posible garantizar categóricamente que no existe una asíntota vertical en ese punto?
3. Geométricamente, ¿es posible que la gráfica de una función intercepte o cruce su propia asíntota vertical? Fundamente su respuesta usando la definición de función.
4. Explique por qué es absolutamente necesario utilizar límites laterales al evaluar una función con la forma  $1/x$  en  $x = 0$ , pero no es necesario para  $1/x^2$ .
5. Describa cómo el signo del numerador influye en la dirección de la asíntota vertical cuando evaluamos un límite lateral con forma  $K/0$ .
6. Analice la función logarítmica natural  $\ln(x)$ . ¿Por qué carece de sentido evaluar el límite lateral cuando  $x \rightarrow 0^-$  para buscar su asíntota?
7. En el estudio de funciones trigonométricas como la secante  $\sec(x)$ , identifique y explique la periodicidad de sus asíntotas verticales.
8. Si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ , ¿qué comportamiento visual asume la curva al aproximarse a la recta  $x = c$  trazada en el plano cartesiano?
9. Demuestre verbalmente por qué una función polinómica de grado  $n$  mayor que cero jamás exhibirá asíntotas verticales en el plano real de coordenadas.
10. Si en el denominador de una expresión racional se halla un factor elevado a una potencia impar, ¿qué garantiza este exponente respecto al cambio de signo lateral?





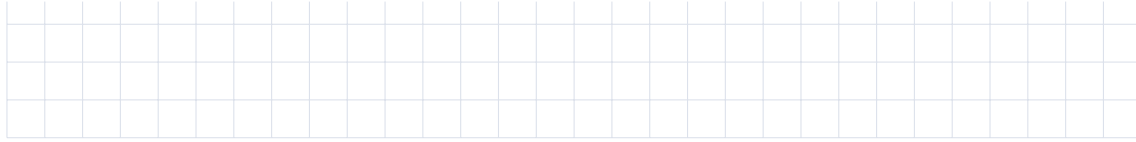




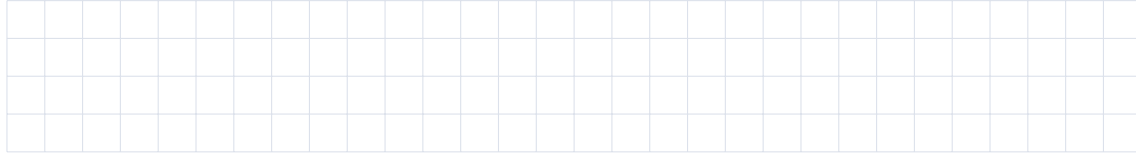




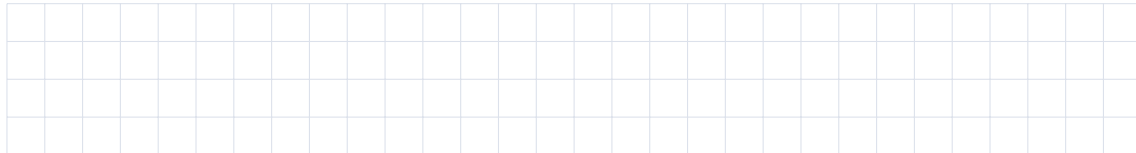




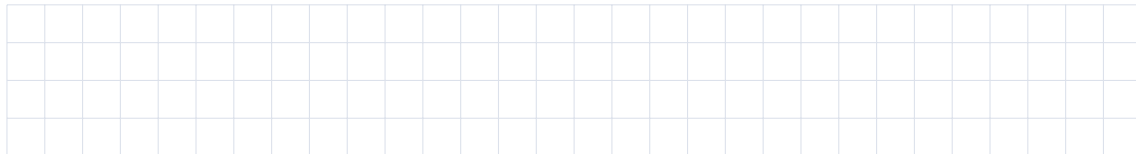
**Problema 17.** La tasa reproductiva exponencial de un alga bio-tóxica oceánica decreta  $T(s) = \frac{s^2}{|s|}$ . Corrobore lógicamente si el brote celular sufre una explosión demográfica infinita descontrolada cayendo la salinidad marina a rango cero puro.



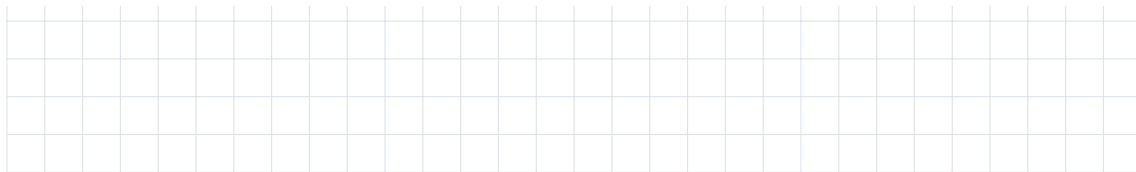
**Problema 18.** Un sensor termocupla industrial falsea lecturas calóricas  $L(q) = \frac{1-q^2}{(q-1)^2}$ . Aísle la perturbación límite extrema recibida por el panel de monitoreo al recalentar el circuito interno acercándose al primer vatio real.



**Problema 19.** La aerodinámica del alerón trasero de un bólido pierde flujo laminar midiendo  $F(w) = \frac{\sin(w)}{w^2 - \pi w}$ . Especifique el vórtice turbulento inestable limitante si el caudal angular lateral choca raspando asintóticamente con pi radianes.



**Problema 20.** La vida útil residual de un isótopo trazador oncológico colapsa computando  $V(h) = \frac{h}{\ln(h)}$ . Demuestre si la radiación gamma curativa experimenta un decaimiento infinito perjudicial rozando marginalmente la primera hora clínica.



## Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

1.  $+\infty$ .
2.  $-\infty$ .
3. Segundo, Negativo,  $-\infty$ .
4.  $-\infty$ .
5.  $-\infty$ .
6.  $-\infty$ .
7.  $-\infty$ .
8.  $-\infty$ .
9.  $+\infty$ .
10.  $-\infty$ .
11.  $+\infty$ .
12.  $x = -1$ . (En  $x = 1$  hay hueco).
13.  $-\infty$ .
14.  $-\infty$ .
15. 10 (No es infinito, es hueco).
16.  $+\infty$ .
17. 0 (Exponente va a  $-\infty$ ).
18.  $-\infty$ .
19. 1 (Límite por L'Hôpital).
20.  $-\infty$ .

### Propuestos de Aplicación

1. 4, (+),  $+\infty$ .
2.  $1^-$ , (+),  $+\infty$ .
3. 0, Positivo,  $-\infty$ .
4.  $+\infty$  térmica.
5.  $+\infty$  saturación.
6.  $+\infty$  gravitatorio.
7. 6 atmósferas (Hueco).
8.  $-\infty$  latencia.
9.  $+\infty$  tensión.
10.  $-\infty$  fondos.
11.  $-\infty$  déficit hídrico.
12.  $+\infty$  atasco permafrost.
13.  $+\infty$  toxicidad.
14.  $-\infty$  sujeción.
15.  $+\infty$  zumbido vibratorio.
16.  $-1$  conductancia (Es Límite notable).
17. 0 celular (No explota).
18.  $-\infty$  falsa lectura.
19.  $-1/\pi$  turbulencia (Hueco).
20.  $-\infty$  decaimiento.



## ¡Límite Asintótico Alcanzado!

'A veces pensamos que hemos topado con un muro vertical infranqueable, pero la matemática nos demuestra que si cambiamos de dirección, nuestro potencial de crecimiento es verdaderamente infinito.'

- La constante de la perseverancia

¡Excelente trabajo! Has logrado dominar el análisis crítico del comportamiento divergente.

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

