CÁLCULO DE UNA VARIABLE

LÍMITES AL INFINITO

CUADERNO DE TRABAJO

Asíntotas y Funciones Racionales

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Comportamiento a Largo Plazo

Hasta ahora, hemos analizado qué le sucede a una función $f(x)$ cuando la variable x se acerca a un número fijo a. Sin embargo, en muchas aplicaciones científicas y económicas, nos interesa saber qué ocurre cuando la variable independiente crece sin límite (es decir, cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$).

PROFE TEO

¡Infinito NO es un número! Es un concepto de crecimiento ilimitado. Por lo tanto, no puedes operar con él como si fuera un 5 o un 10. Las expresiones $\frac{\infty}{\infty}$ o $\infty - \infty$ son indeterminaciones.

1. Definición Analítica de Límite al Infinito

Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como queramos, al elegir una x suficientemente grande.

Teorema Fundamental: Si $r > 0$ es un número racional, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

2. Asíntotas Horizontales

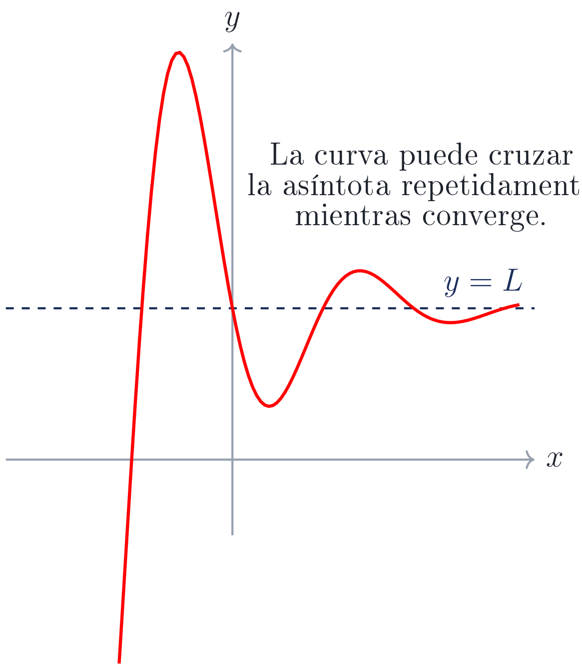
La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Una función puede cruzar su asíntota horizontal, a diferencia de las verticales.

PROFE TEO

Una gráfica puede tener como máximo **dos** asíntotas horizontales diferentes: una hacia la derecha ($+\infty$) y otra hacia la izquierda ($-\infty$).



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

PROFE TEO

¡El mayor peligro de todo el curso! Recuerda que $\sqrt{x^2} = |x|$. Por lo tanto, si $x \to -\infty$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$. ¡Nunca lo olvides!

Problema Resuelto 1: Polinomios del Mismo Grado

Enunciado: Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$.
Solución: Al evaluar obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$. Dividimos cada término entre la mayor potencia de x del denominador, que es x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Aplicando el teorema fundamental, los términos divididos por x tienden a cero:

$$\frac{3-0-0}{5+0+0} = \frac{3}{5}$$

Problema Resuelto 2: Grado del Numerador Mayor

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x}{2x^2+1}$.
Solución: Dividimos entre la mayor potencia del denominador (x^2):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{5}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}}$$

El numerador tiende a $\infty + 0 = \infty$, y el denominador tiende a $2 + 0 = 2$. Como $\frac{\infty}{2} = \infty$, el límite diverge hacia el infinito.

Problema Resuelto 3: Grado del Denominador Mayor

Enunciado: Evalúe $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{x^3+2}$.
Solución: Dividimos entre x^3 (mayor potencia del denominador):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^3}}$$

Los términos superiores tienden a cero. $\frac{0-0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal hacia la izquierda.

Problema Resuelto 4: Radicales hacia el Infinito Positivo

Enunciado: Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{3x-5}$.
Solución: Dividimos entre x. Como $x \to \infty$, x es positivo y podemos ingresarlo a la raíz como $x = \sqrt{x^2}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}{3 - \frac{5}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}}{3 - \frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{9+0}}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$$

Problema Resuelto 5: Radicales hacia el Infinito Negativo

Enunciado: Evalúe el mismo límite anterior, pero $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{3x-5}$.
Solución: Dividimos entre x. Como $x \to -\infty$, x es negativo. Por definición, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Por lo tanto, $x = -\sqrt{x^2}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-5}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}}{3 - \frac{5}{x}}$$

Evaluando los límites nulos:

$$\frac{-\sqrt{9+0}}{3-0} = \frac{-3}{3} = -1$$

PROFE TEO
En el Problema 5, introducimos el $-x$ dentro de la raíz como x^2. El signo menos debe quedarse afuera esperando. ¡Trampita clásica de exámenes!

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Límite Demográfico

Contexto: El crecimiento de insectos obedece $P(t) = \frac{5000t}{t+10}$. Halle la población asintótica máxima permitida por el ecosistema al transcurrir años indefinidamente.
Solución: Calculamos $\lim_{t\to\infty} \frac{5000t}{t+10}$. Dividimos entre t: $\lim_{t\to\infty} \frac{5000}{1+10/t}$. Evaluando el límite, el término $10/t$ tiende a 0. Resulta $5000/1$. **Respuesta:** La población máxima sostenida es 5000 insectos.

Aplicación 2: Estabilización Térmica

Contexto: Un motor disipa calor modelado por $T(x) = 25 + \frac{100}{x^2+1}$. Determine la temperatura térmica base estabilizada cuando el tiempo de enfriamiento tiende al infinito.
Solución: Evaluamos $\lim_{x\to\infty} \left(25 + \frac{100}{x^2+1}\right)$. El término $\frac{100}{x^2+1}$ tiende a 0 puesto que el denominador crece indefinidamente. **Respuesta:** La temperatura base estabilizada será exactamente 25 grados.

Aplicación 3: Farmacocinética

Contexto: La concentración de antibiótico marca $C(t) = \frac{4t^2}{2t^2+5t+1}$ mg/L. Verifique la concentración residual permanente en el torrente sanguíneo para tiempos prolongados.
Solución: Límite al infinito de racionales del mismo grado: dividimos entre t^2. $\lim_{t\to\infty} \frac{4}{2+5/t+1/t^2} = \frac{4}{2+0+0}$. **Respuesta:** La concentración residual permanente será de 2 mg/L.

PROFE TEO
Las asíntotas horizontales representan la *estabilización* de un sistema. En física y economía, es el comportamiento que observarás luego de un tiempo prolongado.

Aplicación 4: Velocidad Aerodinámica

Contexto: Una sonda ingresa a la atmósfera con velocidad $V(s) = \frac{120s^3-5}{4s^3+s}$. Calcule la velocidad terminal límite que alcanza la estructura metálica.
Solución: $\lim_{s\to\infty} \frac{120s^3-5}{4s^3+s}$. Al tener el mismo grado s^3 arriba y abajo, el límite es el cociente de los coeficientes principales. $120/4$. **Respuesta:** La velocidad terminal es de 30 unidades.

Aplicación 5: Costo de Producción

Contexto: El costo unitario promedia $U(q) = \frac{500+2q}{q}$ dólares. Proyecte el costo de manufactura marginal al producir volúmenes masivos de componentes electrónicos.
Solución: Separamos fracciones: $U(q) = \frac{500}{q} + 2$. $\lim_{q\to\infty} \left(\frac{500}{q} + 2\right) = 0 + 2$.
Respuesta: El costo marginal proyectado se estabilizará en 2 dólares.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué la técnica de "dividir por la mayor potencia del denominador"funciona sistemáticamente para levantar la indeterminación ∞/∞?
2. Si el grado del numerador de una función racional es estrictamente mayor que el grado del denominador, explique algebraicamente por qué carece de asíntotas horizontales.
3. Geométricamente, ¿qué diferencia existe entre el comportamiento de una curva al cruzar una asíntota vertical en comparación con una asíntota horizontal?
4. Argumente por qué una función polinómica de grado mayor a cero jamás podrá tener una asíntota horizontal.
5. Explique el error lógico al afirmar que $\infty - \infty = 0$ cuando evaluamos límites de funciones con radicales en restas divergentes.
6. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$, ¿cuántas asíntotas horizontales posee la gráfica de f? Cite un ejemplo de este fenómeno.
7. ¿Por qué la identidad $\sqrt{x^2} = x$ es matemáticamente falsa en el contexto general y cómo afecta esta trampa a los límites cuando $x \to -\infty$?
8. Si una función modela la carga de un condensador, ¿qué significado físico directo tiene su límite al infinito en el análisis de circuitos?
9. Analice el límite de $f(x) = \sin(x)$ cuando $x \to \infty$. ¿Por qué este límite no existe a pesar de ser una función continua y acotada?
10. Si aplicamos un límite al infinito sobre una función constante $g(x) = c$, ¿el resultado depende de la variable x? Argumente su respuesta formalmente.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2-3x}{2x^2+5}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Dividimos todos los términos entre la mayor potencia, que es _____.
2. La expresión queda: $\lim_{x\to\infty} \frac{7-\frac{3}{\_\_\_\_}}{2+\frac{5}{\_\_\_\_}}$.
3. Eliminando los términos que tienden a cero, el límite exacto es _______.

Problema 2. Resuelva $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{4x^4+x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identificamos la mayor potencia del denominador: _____.
2. Dividiendo la expresión obtenemos: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{\_\_\_\_}-\frac{1}{x^4}}{4+\frac{1}{\_\_\_\_}}$.
3. El numerador tiende a _____ y el denominador a 4, resultando un límite de _____.

Problema 3. Halle $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Multiplicamos por la conjugada: $\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+\_\_\_\_)}{\sqrt{x^2+x}+\_\_\_\_}$.
2. El numerador se convierte en diferencia de cuadrados: $x^2+x-\_\_\_\_=x$.
3. Dividimos arriba y abajo entre x, dando $\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}$, cuyo resultado final es _____.

PROFE TEO

Las raíces restadas ($\infty-\infty$) requieren que multipliques por su conjugada para pasarlas a forma fraccionaria. ¡No las evalúes directo!

Problemas Generales Algebraicos

Problema 4. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x+1}{3x^3+8x^2}$.

Problema 5. Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-x^2}{x^5+1}$.

Problema 6. Halle $\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x^2}{5x-7}$.

Problema 7. Calcule la asíntota horizontal hacia la derecha de $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-2}$.

Problema 8. Calcule la asíntota horizontal hacia la izquierda de la función anterior $f(x)$.

Problema 9. Encuentre el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4-3x^2}}$.

Problema 10. Evalúe la indeterminación $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

Problema 11. Halle $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+2x})$.

Problema 12. Calcule analíticamente $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+x}}{2x-1}$.

Problema 13. Resuelva el caso $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$.

Problema 14. Determine $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$.

Problema 15. Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3(x-2)^2}{(x+5)^5}$.

Problema 16. Evalúe $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x-5|}{x-5}$.

Problema 17. Halle $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Problema 18. Calcule el límite exponencial $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2+x}$.

Problema 19. Determine $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Problema 20. Halle analíticamente $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un cultivo de placa satura su expansión evaluado por $B(t) = \frac{800t^2}{2t^2+1}$. Determine el límite poblacional al transcurrir semanas ininterrumpidas.

Guía de Solución Interactiva

1. La expresión fraccional es de grado _____ en el numerador y denominador. 2. Extraemos los coeficientes principales: $\frac{\_\_\_\_\_}{2}$. 3. Dividiendo obtenemos un límite poblacional de _____ bacterias.

Problema 2. El voltaje de un condensador se recarga modelando $V(t) = 12 - \frac{12}{t+1}$. Calcule la tensión continua máxima alcanzada a muy largo plazo.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos la fracción variable $\lim_{t\to\infty} \frac{12}{t+1}$ que tiende a _____. 2. La tensión nominal constante se mantiene intacta en _____. 3. Restando, la tensión máxima proyectada será _____ voltios.

Problema 3. La densidad nebular espacial decae $D(r) = \frac{5r}{\sqrt{r^2+10}}$. Defina el índice de masa residual asintótico alejándose infinitamente del núcleo activo galáctico.

Guía de Solución Interactiva

1. Dividimos entre la variable r. En el radical entra como _____. 2. Evaluamos la fracción limitante $\frac{5}{\sqrt{1+0}}$, simplificando el divisor a _____. 3. El índice residual astronómico se estabiliza en _____ unidades.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La altitud máxima estabilizada de un dron de exploración topográfica obedece a $H(t) = \frac{300t^3+50}{2t^3+t}$. Proyecte el techo de vuelo asintótico indefinido.

Problema 5. El rendimiento de cristalización salina disminuye mediante $R(x) = \frac{40x}{\sqrt{16x^2+9}}$. Estime el factor químico asintótico estabilizado para reactivos masivos ilimitados.

Problema 6. La latencia en milisegundos de un algoritmo en red saturada marca $L(p) = \frac{p^2-p}{p^3+1}$. Verifique la demora de datos operando sobre procesamientos masivos extremos.

Problema 7. Una placa tectónica dilata su fricción termodinámica registrando $F(d) = \frac{10d^2+d}{5d^2-1}$. Defina la temperatura friccional límite para desplazamientos geológicos perpetuos incontables.

Problema 8. La mitigación de señal radial fotónica sufre una atenuación estructural $A(k) = \frac{120k^4}{3k^4+k^2}$. Calibre la pérdida decibélica residual sobre transmisiones a distancias kilométricas superlativas.

Problema 9. El umbral radiactivo base en una caverna geológica emite $E(m) = 15 + \frac{m}{\sqrt{m^2+m}}$. Indique la radiación alfa límite residual al perforar estratos milenarios profundos.

Problema 10. La resistencia de impedancia acústica de un tabique obedece $I(w) = \frac{w^3+1}{w^2}$. Verifique analíticamente la divergencia sónica enfrentando frecuencias de resonancia incontrolables masivas.

Problema 11. La presión de una válvula hidráulica satura estabilizándose con la ecuación $P(v) = \frac{8v^2-v}{4v^2+2}$. Defina el estrés asintótico tolerado por el tanque contenedor.

Problema 12. El rendimiento fotovoltaico de un cristal polarizado pierde luminosidad $E(l) = \frac{100l}{\sqrt{l^2+5l}}$. Estipule la eficiencia porcentual límite operando bajo lúmenes de irradiación solares extremos.

Problema 13. La probabilidad de salto cuántico en un tunelamiento decrece $Q(t) = e^{-0{,}5t}$. Garantice algebraicamente el colapso absoluto de probabilidad temporal para intervalos estadísticos infinitos.

Problema 14. La amplitud de oscilación sísmica secundaria mitiga su choque mediante $S(d) = \frac{d^2+5d}{d^2+1}$. Concrete el impacto oscilatorio vibratorio remanente sobre el epicentro telúrico principal.

Problema 15. Las revoluciones críticas de estabilización rotatoria de una turbina eólica marcan $W(v) = \frac{50v^3}{2v^3+v^2}$. Compruebe el tope dinámico de aspas enfrentando vientos huracanados sostenidos constantes.

Problema 16. El coeficiente de arrastre aerodinámico en un túnel colapsa limitando a $C(s) = \frac{\sqrt{9s^2+s}}{s+2}$. Resuelva la fricción límite frontal sometiendo fuselajes a escalas supersónicas prolongadas.

Problema 17. Un campo magnético residual terrestre disipa teslas computando $M(r) = \frac{5r^2-2}{r^2+8}$. Precise la polaridad asintótica magnetizada estabilizada extendiendo el radio planetario vectorialmente indefinido.

Problema 18. La tenacidad a tracción mecánica en vigas rinde fracturas asintóticas midiendo $T(f) = \frac{4f^3+2f}{2f^3+f^2}$. Determine la tolerancia final soportando cargas puenteadas estructurales masivas extremas.

Problema 19. La pérdida funcional en una red neuronal convolucional converge registrando $N(e) = \frac{10}{\sqrt{e}}$. Asegure el margen residual de error cognitivo entrenando épocas de propagación incalculables.

Problema 20. La degradación de polímeros anticorrosivos marítimos ralentiza según $D(y) = \frac{8y^2}{y^2+3y}$. Proyecte el blindaje residual estructural asintótico al someter cascos a salinidad cronológica oceánica perpetua.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $7/2$.
2. 0.
3. $1/2$.
4. $5/3$.
5. 0.
6. $+\infty$.
7. $y = 2$.
8. $y = -2$.
9. 1.
10. 2.
11. -1.
12. 1.
13. -1.
14. $\frac{a-b}{2}$.
15. 8.
16. -1.
17. 1.
18. 0.
19. 1.
20. -1.

Propuestos de Aplicación

1. 400 bacterias.
2. 12 voltios.
3. 5 unidades.
4. 150 metros.
5. 10 factor químico.
6. 0 milisegundos.
7. 2 grados.
8. 40 decibelios.
9. 16 radiación alfa.
10. Diverge $(+\infty)$.
11. 2 atmósferas.
12. 100 por ciento.
13. 0 probabilidad.
14. 1 amplitud.
15. 25 rotaciones.
16. 3 coeficiente.
17. 5 teslas.
18. 2 tolerancia.
19. 0 error residual.
20. 8 blindaje residual.

$\to \infty$

¡Exploraste el Infinito!

'El infinito no es un lugar inalcanzable, es la prueba matemática de que todo esfuerzo, por más prolongado que sea, eventualmente encuentra su propia estabilidad.'

- La constante de la perseverancia

¡Misión cumplida! Has dominado el comportamiento asintótico. Estás listo para modelar la proyección a largo plazo de cualquier sistema.

$y = L$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com