CÁLCULO DE UNA VARIABLE

LEYES DE LOS LÍMITES

CUADERNO DE TRABAJO

Propiedades y Cálculo Algebraico

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Álgebra de los Límites

Evaluar límites usando tablas de valores o gráficas es útil, pero poco riguroso y propenso a errores. Para calcular límites de manera exacta, utilizamos las **Leyes de los Límites**, que nos permiten desarmar funciones complejas en partes más simples.

PROFE TEO
¡Ojo! Estas leyes aplican ÚNICAMENTE si los límites individuales L y M existen y son números reales. No las uses a ciegas si hay un infinito de por medio.

1. Leyes Fundamentales

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ existen, y c es una constante.

- **Suma / Resta:** $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
- **Múltiplo Constante:** $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot L$
- **Producto:** $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
- **Cociente:** $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$.
- **Potencia / Raíz:** $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$ y $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si n es par, asumimos $L > 0$).

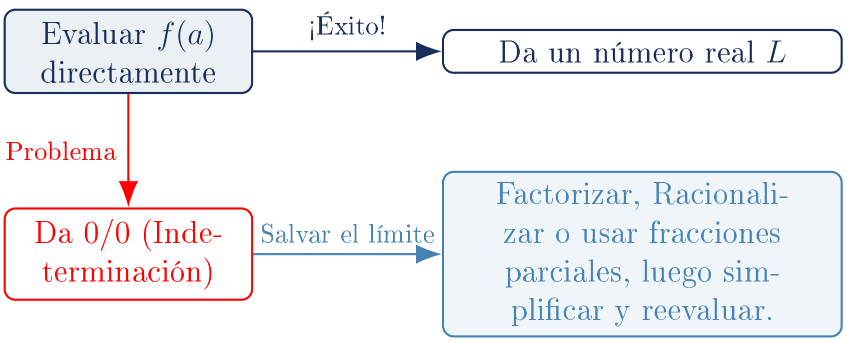
2. Propiedad de Sustitución Directa

Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Esta es la primera estrategia que siempre debes intentar.

PROFE TEO
Si al evaluar directamente obtienes 0/0, significa "hay que trabajar". El cero en el denominador indica un factor escondido que debes destruir factorizando o racionalizando.



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Polinomios y Sustitución Directa

Enunciado: Evalúe $\lim_{x\to 2}(3x^3 - 4x^2 + x - 5)$.
Solución: Al ser una función polinómica, el dominio es $\mathbb{R}$. Aplicamos la propiedad de sustitución directa reemplazando $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2}(3x^3 - 4x^2 + x - 5) = 3(2)^3 - 4(2)^2 + 2 - 5$$

$$= 3(8) - 4(4) + 2 - 5 = 24 - 16 + 2 - 5 = 5$$

PROFE TEO
La diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ y la aspa simple serán tus mejores aliados. ¡Repasa tu álgebra básica!

Problema Resuelto 2: Factorización de Trinomios

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-9}$.
Solución: Sustitución directa da $0/0$. Factorizamos numerador y denominador. Numerador: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Denominador: Diferencia de cuadrados $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x+3}$$

Evaluamos nuevamente: $\frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$.

Problema Resuelto 3: Uso de Conjugadas

Enunciado: Evalúe $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.
Solución: Evaluar arroja $0/0$. Multiplicamos arriba y abajo por la conjugada del numerador, que es $(\sqrt{x}+2)$.

$$\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

Cancelamos $(x-4)$ asumiendo $x \neq 4$:

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

Problema Resuelto 4: Fracciones Complejas

Enunciado: Encuentre el valor de $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h}$.
Solución: Sustituir $h = 0$ da $0/0$. Buscamos un denominador común en el numerador principal.

$$\frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} = \frac{\frac{3-3-h}{9+3h}}{h} = \frac{\frac{-h}{9+3h}}{h}$$

Al multiplicar extremos y medios, cancelamos h:

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(9+3h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{9+3h}$$

Evaluamos $h = 0$: $\frac{-1}{9+0} = -\frac{1}{9}$.

Problema Resuelto 5: Racionalización Cúbica

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.
Solución: Sustituyendo obtenemos $0/0$. Usamos la diferencia de cubos donde $a = \sqrt[3]{x}$ y $b = 2$. Multiplicamos por $(a^2 + ab + b^2)$: El factor es $\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)$.

$$\lim_{x\to 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \lim_{x\to 8} \frac{x-8}{(x-8)(\dots)}$$

Cancelando $(x-8)$ evaluamos en el factor multiplicador:

$$\frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

PROFE TEO

Las raíces cúbicas requieren la diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. ¡La conjugada cúbica es más larga!

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Expansión de Especies

Contexto: La población de algas en un lago artificial crece modelada por $P(t) = \frac{5t^2+10t}{t^2-4}$ en miles. Evalúe algebraicamente el límite de la población al acercarse a los dos meses si ocurre una alteración química.
Solución: Calculamos $\lim_{t\to 2} \frac{5t(t+2)}{(t-2)(t+2)}$. Simplificando $(t+2)$ queda $\lim_{t\to 2} \frac{5t}{t-2}$. Al evaluar, el denominador tiende a cero y el numerador a 10. **Respuesta:** El límite no existe; la población diverge hacia un colapso asintótico por la alteración química.

Aplicación 2: Eficiencia Aerodinámica

Contexto: El coeficiente de fricción de un túnel de viento depende de la velocidad del flujo v según $C(v) = \frac{\sqrt{v+9}-3}{v}$. Determine el valor límite del coeficiente cuando el flujo de aire tiende al reposo.
Solución: Evaluamos $\lim_{v\to 0} \frac{\sqrt{v+9}-3}{v}$. Da $0/0$. Multiplicamos por la conjugada $\sqrt{v+9}+3$. Resulta en $\frac{v+9-9}{v(\sqrt{v+9}+3)} = \frac{1}{\sqrt{v+9}+3}$. Sustituyendo $v = 0$. **Respuesta:** El coeficiente límite en reposo es exactamente $1/6$.

Aplicación 3: Tasa de Enfriamiento Metálico

Contexto: Una aleación de titanio reduce su temperatura según $T(x) = \frac{x^3-27}{x-3}$ grados por segundo, donde x mide el espesor. Determine la tasa límite de enfriamiento si logramos un espesor atómico tendiente a tres nanómetros.
Solución: $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3^3}{x-3}$. Usando diferencia de cubos queda $\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$. Cancelando el factor crítico, evaluamos $3^2 + 3(3) + 9$. **Respuesta:** La tasa límite proyectada es de 27 grados/segundo.

Aplicación 4: Latencia en Redes Ópticas

Contexto: Un protocolo de red tiene un retraso fraccionario de datos dado por $R(s) = \frac{\frac{1}{s+2}-\frac{1}{2}}{s}$, con s en milisegundos. Calcule rigurosamente la latencia base cuando la señal de interferencia s se aproxima a cero.
Solución: $\lim_{s\to 0} \frac{\frac{2-(s+2)}{2(s+2)}}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{-s}{2s(s+2)}$. Cancelando s queda $\frac{-1}{2(s+2)}$. Sustituimos $s = 0$. **Respuesta:** La latencia base es de $-1/4$ milisegundos.

PROFE TEO
Las aplicaciones físicas a menudo usan límites con $t \to 0$ para encontrar tasas instantáneas, ¡la misma base de la derivada!

Aplicación 5: Producción Industrial Acumulada

Contexto: La fabricación de microprocesadores reporta costos marginales escalados por la ecuación $C(u) = \frac{u^2-6u+8}{u^2-16}$. Halle el límite del costo marginal si el nivel de producción se estabiliza acercándose a cuatro mil unidades.
Solución: $\lim_{u\to 4} \frac{(u-4)(u-2)}{(u-4)(u+4)}$. Se cancela la indeterminación $(u-4)$. Evaluamos el cociente resultante $\frac{4-2}{4+4} = \frac{2}{8}$. **Respuesta:** El costo marginal tenderá a 1/4 o 0,25 millones.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué la ley del cociente para límites exige explícitamente que el límite del denominador sea diferente de cero?

2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, ¿esto implica que $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]$ también debe ser cero? Argumente.

3. Explique el fundamento algebraico que nos permite cancelar un factor como $(x - a)$ tanto en el numerador como en el denominador al calcular un límite.

4. ¿Qué ley de los límites garantiza que un polinomio siempre puede evaluarse por sustitución directa en todo su dominio?

5. Al enfrentar una indeterminación $0/0$ en funciones que incluyen radicales de índice impar, ¿por qué la conjugada tradicional no funciona?

6. Si usted conoce que $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$, deduzca paso a paso el valor de $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{f(x) - 16}$.

7. Si evaluamos directamente una función racional y obtenemos un número diferente de cero en el numerador y cero en el denominador, ¿qué conclusión geométrica extraemos?

8. Un estudiante afirma que $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ siempre existe, incluso si $\lim f(x)$ no existe. ¿Es correcto? Brinde un contraejemplo.

9. ¿De qué manera la técnica del denominador común transforma una indeterminación $0/0$ en fracciones complejas hacia una forma gobernable?

10. Si una función consta del producto de una función que tiende a infinito y otra que tiende a cero, ¿se puede aplicar la ley del producto directamente? Justifique.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-3x-10}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos $x = 5$ y obtenemos la forma $\frac{\_\_\_}{\_\_\_}$.
2. Factorizamos ambos polinomios: $\lim_{x\to 5} \frac{(x-\_\_\_\_)(x+\_\_\_\_)}{(x-5)(x+\_\_\_\_)}$.
3. Simplificamos y volvemos a sustituir: $\frac{5+5}{5+2} = \_\_\_\_\_\_$.

Problema 2. Resuelva $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Multiplicamos por la conjugada que es $\sqrt{x+3} + \_\_\_\_$.
2. El numerador se vuelve diferencia de cuadrados: $(x+3) - \_\_\_\_ = x - 1$.
3. Cancelamos $(x-1)$ y evaluamos $\frac{1}{\sqrt{4}+2}$, obteniendo $\_\_\_\_$.

Problema 3. Halle $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Expandimos el binomio al cubo: $8 + 12h + 6h^2 + \_\_\_\_ - 8$.
2. Extraemos h como factor común: $h(12 + \_\_\_\_ + h^2)$.
3. Simplificamos la fracción y evaluamos cuando $h = 0$: el límite es $\_\_\_\_$.

PROFE TEO

Recuerda la vieja confiable: sacar factor común x suele ser el primer paso que muchos olvidan. ¡No te compliques!

Problemas Generales Algebraicos

Problema 4. Calcule $\lim_{x\to -2}(4x^2 + 5x - 7)$.

Problema 5. Evalúe $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$.

Problema 6. Halle $\lim_{t\to -4} \frac{t^2+3t-4}{t^2+5t+4}$.

Problema 7. Calcule el valor de $\lim_{x\to 9} \frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$.

Problema 8. Resuelva $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{16+h}-4}{h}$.

Problema 9. Encuentre el límite $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Problema 10. Calcule $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+5x+3}{x+1}$.

Problema 11. Halle $\lim_{t\to 0} \frac{t^3-t^2}{t^2+5t^3}$.

Problema 12. Evalúe con fracciones $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$.

Problema 13. Resuelva el caso $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$.

Problema 14. Determine $\lim_{u \to 2} \frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$.

Problema 15. Calcule $\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$. (Pista: cambie variable $u^6 = x$).

Problema 16. Evalúe $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$.

Problema 17. Halle $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ considerando x constante.

Problema 18. Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8}$.

Problema 19. Determine $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

Problema 20. Halle analíticamente $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La resistencia eléctrica en un circuito térmico modela óhmicamente $R(T) = \frac{T^2-100}{T-10}$. Halle la resistencia límite estabilizada al acercarse la temperatura a los diez grados centígrados.

Guía de Solución Interactiva

1\. Evaluamos $T = 10$ y tenemos la forma $\frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_}$. 2. Factorizamos diferencia de cuadrados: $(T - \_\_\_\_\_)(T + \_\_\_\_\_)$. 3. Simplificamos y evaluamos: la resistencia final es _____ ohmios.

Problema 2. Una turbina hidráulica tiene pérdida de caudal proyectada por $C(v) = \frac{\sqrt{v+16}-4}{v}$. Calcule con precisión geométrica la caída de volumen cuando el vórtice de flujo v tiende al reposo.

Guía de Solución Interactiva

1\. Multiplicamos por la conjugada $\sqrt{v+16} + \_\_\_\_\_$. 2. Reducimos el numerador operado quedando $v + 16 - \_\_\_\_\_ = v$. 3. Tras cancelar v, evaluamos en $v = 0$ y la pérdida es _____.

Problema 3. Un servidor enruta algoritmos con latencia evaluada mediante $L(s) = \frac{s^3-1}{s-1}$. Averigüe rigurosamente el retraso en milisegundos cuando la carga del sistema s converge a una unidad estándar.

Guía de Solución Interactiva

1\. Factorizamos la diferencia de cubos extrayendo factor $(s - \_\_\_\_\_)$. 2. El trinomio restante es $(s^2 + s + \_\_\_\_\_)$. 3. Simplificando obtenemos una latencia exacta de _____ milisegundos.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. El índice de toxicidad por filtración de un polímero se rige por $I(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$. Evalúe el factor contaminante residual si el tiempo de degradación se aproxima a dos años.

Problema 5. La fuerza electromotriz inducida en una bobina rotativa marca el voltaje $V(t) = \frac{t^2-9}{t^2+t-12}$. Calcule el pico de tensión límite si el tiempo asintótico de giro llega a tres segundos.

Problema 6. La densidad poblacional de una colonia fúngica decrece según $D(m) = \frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{5}}{m-5}$. Determine la tasa poblacional límite cuando los nutrientes disponibles caen a cinco miligramos por litro.

Problema 7. El desgaste en engranajes planetarios genera una vibración $W(r) = \frac{r^3-8}{r^2-4}$. Calibre la resonancia armónica máxima anticipada justo antes de que las revoluciones toquen las dos mil vueltas.

Problema 8. Un panel fotovoltaico pierde rendimiento por polvo superficial $P(d) = \frac{\sqrt{d+25}-5}{d}$. Halle la caída porcentual límite en eficiencia si el grosor de las partículas de polvo es prácticamente invisible.

Problema 9. La tensión estructural de un puente colgante bajo nieve obedece a $S(w) = \frac{w^2-1}{w^2-3w+2}$. Proyecte el colapso tensional límite asumiendo que el peso acumulado roza la unidad crítica.

Problema 10. El margen de utilidad bruta de un criptoactivo volátil opera según $U(p) = \frac{\sqrt{p}-3}{p-9}$. Despeje financieramente el beneficio tope sabiendo que el precio unitario bordeará los nueve dólares.

Problema 11. Un reactor atómico registra variaciones neutrónicas $N(x) = \frac{x^4-1}{x-1}$. Precise el límite exacto de la fisión controlada si el umbral del moderador de grafito alcanza la fase uno.

Problema 12. La propagación de señal wifi en un túnel pierde decibelios marcando $F(d) = \frac{\frac{1}{d+3}-\frac{1}{4}}{d-1}$. Determine algebraicamente la degradación de señal al acercarnos al primer metro subterráneo.

Problema 13. La dilatación térmica en rieles ferroviarios arroja elongaciones en milímetros dadas por $E(t) = \frac{t^2-16}{\sqrt{t}-2}$. Estime la deformación límite del acero al alcanzar temperaturas de dieciséis grados Celsius.

Problema 14. La dosis metabólica filtrada por el riñón es $M(c) = \frac{c^3-27}{c^2-9}$. Evalúe el pico de filtración toxicológica si la concentración plasmática se empareja hacia tres milimoles.

Problema 15. Un acelerador de partículas estabiliza el bosón siguiendo $A(v) = \frac{\sqrt[3]{v}-1}{v-1}$. Halle la velocidad cuántica residual requerida acercándose vertiginosamente a la constante lumínica normalizada.

Problema 16. Las emisiones de dióxido de carbono en la refinería obedecen $C(q) = \frac{2q^2-5q-3}{q-3}$. Indique la huella de carbono límite si el barril procesado se aproxima a la marca tres.

Problema 17. Un satélite geoestacionario corrige su altitud evaluando el margen de error gravitacional $G(h) = \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}$. Precise la compensación instantánea del motor cuando el desfase de altura es cero.

Problema 18. La cinética de asimilación enzimática sigue un patrón de Michaelis modificado $E(s) = \frac{s^4-81}{s^3-27}$. Demuestre el límite de reacción química acelerando el sustrato celular hasta tres unidades micromolares.

Problema 19. La aerodinámica de un hiperauto en pruebas de túnel muestra carga descendente $D(v) = \frac{\frac{1}{\sqrt{v}}-\frac{1}{2}}{v-4}$. Resuelva el coeficiente aerodinámico crítico limitante al tocar velocidad escala cuatro.

Problema 20. Una aleación termo-inteligente encoge su volumen al enfriarse dictado por $V(t) = \frac{\sqrt{t+5}-3}{t-4}$. Determine matemáticamente la contracción térmica precisa al llegar el cronómetro a los cuatro segundos fríos.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 10/7.
2. 1/4.
3. 12.
4. -1.
5. 6.
6. 5/3.
7. 6.
8. 1/8.
9. 3/2.
10. 1.
11. -1.
12. $-1/4$.
13. $-1/2$.
14. 2/3.
15. 1/3.
16. -1.
17. $2x$.
18. 8/3.
19. 2/3.
20. 1/12.

Propuestos de Aplicación

1. 20 ohmios.
2. 1/8 unidades.
3. 3 milisegundos.
4. 0 de toxicidad.
5. 6/7 voltios.
6. $-1/25$ densidad.
7. 3 vibración máxima.
8. 1/10 caída porcentual.
9. -2 tensión (colapso).
10. 1/6 beneficio tope.
11. 4 unidades neutrónicas.
12. $-1/16$ decibelios.
13. 128 milímetros.
14. 9/2 filtración.
15. 1/3 velocidad residual.
16. 7 huella límite.
17. 5/4 compensación.
18. 4 reacción química.
19. $-1/16$ coeficiente crítico.
20. 1/6 de contracción.

$= L$

¡Límite Alcanzado!

'La matemática nos enseña que una indeterminación no es un callejón sin salida, sino una invitación a mirar el problema desde otro ángulo. ¡Factoriza tus miedos y racionaliza tus metas!'

- El poder de la persistencia algebraica

¡Buen trabajo! Dominar las leyes de los límites es dominar las reglas de juego del universo diferencial.

$0/0$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com