

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

**LA REGLA
DE LA CADENA**

CUADERNO DE TRABAJO
Derivación Compuesta y Notación Leibniz

$u^{n-1}u'$

$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Desarmando la Función Compuesta

Rara vez en la ingeniería encontramos funciones simples como $\sin(x)$ o x^2 . Lo normal es enfrentarnos a funciones anidadas como $\sin(x^2 + 1)$. Para derivar estas estructuras, imaginemos la función como una cebolla: debemos derivar capa por capa, multiplicando los resultados, desde la envoltura más externa hasta el núcleo.

1. La Regla de la Cadena (Notación de Funciones)

Si f y g son funciones derivables, y la función compuesta se define como $y = f(g(x))$, entonces la derivada respecto a x es el producto de la derivada de la función externa (evaluada en la interna) por la derivada de la función interna:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

2. La Notación de Leibniz (Tasas de Variación)

Si y depende de u , y u depende de x , la tasa a la que cambia y con respecto a x es el producto de sus tasas de cambio individuales.

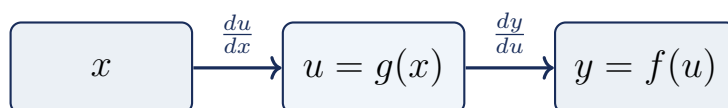
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Esta notación es brillante en física: las unidades de du se cancelan "visualmente" en las fracciones.

3. Corolario: Regla de la Potencia Generalizada

Si $u = g(x)$ es una función derivable y n es cualquier número real, al derivar la potencia de una función bajamos el exponente, restamos uno y **siempre multiplicamos por u'** :

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

.... ▷

PROFE TEO

¡El error más letal! Muchos alumnos derivan $\sin(x^3)$ y responden $\cos(x^3)$. ¡Se olvidaron de multiplicar por la derivada de adentro ($3x^2$)! No caigas en la trampa.

.... ▷

PROFE TEO

Si tienes un trinomio a la décima potencia, ni loco intentes expandirlo. Usa la regla de la potencia generalizada. Es el salvavidas del álgebra.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Polinomio a una Gran Potencia

Enunciado: Calcule la derivada de $y = (5x^3 - 2x + 7)^8$.

Solución: Identificamos la función interna $u = 5x^3 - 2x + 7$. Su derivada es $u' = 15x^2 - 2$. Aplicamos la regla de la potencia generalizada:

$$y' = 8(5x^3 - 2x + 7)^7 \cdot \frac{d}{dx}(5x^3 - 2x + 7)$$

$$y' = 8(5x^3 - 2x + 7)^7 \cdot (15x^2 - 2)$$

Respuesta: $y' = 8(15x^2 - 2)(5x^3 - 2x + 7)^7$.

Problema Resuelto 2: Potencia de una Trigonométrica

Enunciado: Obtenga $f'(x)$ si $f(x) = \sin^4(x)$.

Solución: Reescribimos la función para ver las capas claramente: $f(x) = (\sin x)^4$. Capa exterior: Potencia 4. Capa interior: $\sin x$.

$$f'(x) = 4(\sin x)^3 \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$f'(x) = 4 \sin^3(x) \cdot \cos x$$

Problema Resuelto 3: Argumento Compuesto

Enunciado: Derive la función $y = \cos(x^2 - 3x)$.

Solución: Aquí la función externa es el coseno y la interna es el polinomio. La derivada de $\cos(u)$ es $-\sin(u) \cdot u'$.

$$y' = -\sin(x^2 - 3x) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 3x)$$

$$y' = -\sin(x^2 - 3x) \cdot (2x - 3)$$

Reordenando para que el polinomio no se confunda con el argumento: **Respuesta:** $y' = -(2x - 3) \sin(x^2 - 3x)$.

Problema Resuelto 4: Cadena Doble (Tres capas)

Enunciado: Halle la derivada de $y = \tan^3(5x)$.

Solución: La función es $y = [\tan(5x)]^3$. Hay tres capas: la potencia 3, la tangente, y el ángulo $5x$. Derivamos la potencia: $y' = 3[\tan(5x)]^2 \cdot \frac{d}{dx}[\tan(5x)]$. Derivamos la tangente: $y' = 3 \tan^2(5x) \cdot \sec^2(5x) \cdot \frac{d}{dx}[5x]$. Derivamos el ángulo: $y' = 3 \tan^2(5x) \cdot \sec^2(5x) \cdot 5$ **Respuesta:** $y' = 15 \tan^2(5x) \sec^2(5x)$.

....▷

PROFE TEO

Cuidado con la notación trigonométrica. $\sin^4(x)$ significa $(\sin x)^4$. La función externa es la potencia 4, y la interna es el seno.

....▷

PROFE TEO

Las raíces cuadradas compuestas aparecen en el 90% de los exámenes. Aprende de memoria que $\frac{d}{dx}[\sqrt{u}] = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Te

Problema Resuelto 5: Raíz con Función Racional

Enunciado: Derive la función $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Solución: Expresamos como potencia fraccionaria: $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}$. Por la regla de la cadena, bajamos el $1/2$ y multiplicamos por la derivada del cociente:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1/2} \cdot \left[\frac{(1)(x-1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} \right]$$

Simplificando el corchete: $\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x+1}(x-1)^{3/2}}$$

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Expansión de Biocultivos

Contexto: El área de una colonia bacteriana circular es $A = \pi r^2$. Su radio $r(t)$ crece a 0,5 mm/h tras ser irradiada. Obtenga el ritmo exacto de expansión del área cuando el radio mide ocho milímetros.

Solución: Usamos Leibniz: $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$. Derivamos el área: $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$. Evaluamos en $r = 8$ y $\frac{dr}{dt} = 0,5$: $\frac{dA}{dt} = 2\pi(8) \cdot 0,5 = 16\pi(0,5) = 8\pi$. **Respuesta:** Crece a 8π mm²/h.

Aplicación 2: Refrigeración Aeroespacial

Contexto: El volumen de una esfera criogénica $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ se contrae al enfriarse. Su radio disminuye 0,1 cm/s. Determine la tasa de compresión volumétrica instantánea cuando el radio marca cinco centímetros en órbita.

Solución: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$. Derivamos volumen: $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$. Insertamos valores: $r = 5$, $\frac{dr}{dt} = -0,1$ (contracción). $\frac{dV}{dt} = 4\pi(25)(-0,1) = -10\pi$. **Respuesta:** Se comprime a 10π cm³/s.

Aplicación 3: Costos de Impresión 3D

Contexto: El costo en dólares de producir filamentos es $C(x) = \sqrt{x^2 + 900}$. La producción $x(t)$ escala generando veinte unidades por hora. Cuantifique la tasa de incremento financiero marginal operativo cuando ensamblan cuarenta filamentos.

Solución: $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+900}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+900}}$. Evaluando $x = 40$, $\frac{dx}{dt} = 20$: $\frac{dC}{dt} = \frac{40}{\sqrt{1600+900}} \cdot 20 = \frac{40}{50} \cdot 20 = 16$. **Respuesta:** El costo aumenta 16 USD/h.

Aplicación 4: Despresurización Atmosférica

Contexto: La presión estratosférica soportada por un globo sonda obedece a $P(h) = (100 - 0,5h)^3$ pascales. El altímetro registra ascensos a tres metros por segundo. Evalúe la tasa instantánea de caída bórica alcanzando veinte metros absolutos.

Solución: $\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dh}{dh} = 3(100 - 0,5h)^2(-0,5) = -1,5(100 - 0,5h)^2$. Con $h = 20$, $\frac{dh}{dt} = 3$: $\frac{dP}{dt} = -1,5(100 - 10)^2 \cdot 3 = -4,5(8100) = -36450$. **Respuesta:** Cae a 36450 Pa/s.

Aplicación 5: Contaminación de Nivel Freático

Contexto: El nivel tóxico de un acuífero profundo contamina con densidad $D(c) = \sin(c^2)$. La concentración química $c(t)$ aumenta dos miligramos diarios. Calcule la alteración de contaminación si la saturación es raíz de pi.

Solución: $\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dc}{dc} = \cos(c^2) \cdot 2c$. En $c = \sqrt{\pi}$, $\frac{dc}{dt} = 2$: $\frac{dD}{dt} = \cos(\pi) \cdot 2\sqrt{\pi} \cdot 2 = (-1)(4\sqrt{\pi}) = -4\sqrt{\pi}$. **Respuesta:** Varía a $-4\sqrt{\pi}$ unidades/día.

....▷

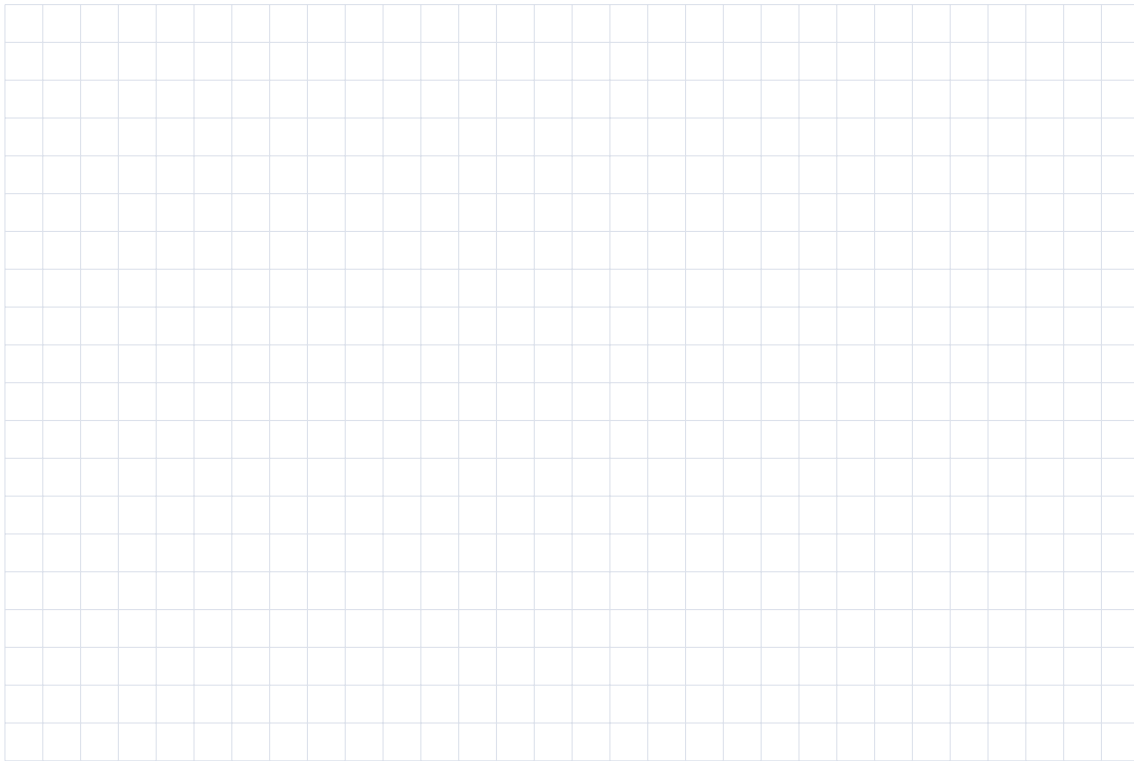
PROFE TEO

La notación de Leibniz es perfecta para problemas de "tasas relacionadas" (física). Solo arma la cadena de fracciones para que se cancelen los denominadores y obtengas lo que buscas.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Argumente con un ejemplo algebraico por qué la expresión $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(x)g'(x)$ es analíticamente falsa y conduce a resultados absurdos.
2. Visualice la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Aunque du no es estrictamente un número real que se cancela", explique por qué este mecanismo resulta tan confiable en física clásica.
3. Analice la función iterativa $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$. Demuestre aplicando dos veces la regla de la cadena que su resultado es equivalente a reescribirla inicialmente como potencia fraccionaria $x^{1/4}$.
4. En un sistema de poleas, la velocidad del engranaje C depende de B, y B depende de A. Relacione este principio de transmisión mecánica con la esencia teórica de la regla de la cadena.
5. Describa en qué orden riguroso operaría la regla de la cadena para desglosar y derivar una función de cuatro capas superpuestas como $y = \cos^3(\sin(x^2))$.
6. Si la derivada interna $g'(x)$ resulta ser idénticamente cero en todo su dominio, ¿qué conclusión inmediata podemos deducir sobre el comportamiento de la función global $f(g(x))$?
7. Un analista financiero calcula que la demanda depende del precio y el precio de la inflación. Estructure la fórmula de Leibniz para obtener la tasa de cambio de la demanda respecto a la inflación.
8. Explique el riesgo analítico de derivar la función trascendente $y = e^{\sin x}$ sin reconocer la estructura de función compuesta.
9. Si evaluamos una función inversa donde $g(x) = f^{-1}(x)$, aplique la regla de la cadena a la identidad $f(g(x)) = x$ para deducir la fórmula de la derivada de funciones inversas.
10. Analice por qué la regla de la cadena es obligatoria al enfrentar funciones pares e impares, demostrando lógicamente que si $f(x)$ es par, su derivada $f'(x)$ debe ser invariablemente impar.



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

- $5(8x - 7)(4x^2 - 7x + 2)^4$.
- $\cos(3x^4 - x)(12x^3 - 1)$.
- $\frac{24x^2}{(x+1)^4}$.
- $12(3x^2 - 4)(x^3 - 4x + 1)^{11}$.
- $\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x-3}}$.
- $-5 \cos^4(x) \sin(x)$.
- $2x \sec^2(x^2 + 1)$.
- $12 \sec^3(4x) \tan(4x)$.
- $m = 8$.
- $-12t^2(t^3 - 2)^{-5}$.
- $(0, -64), (2, 0), (-2, 0)$.
- $\frac{x(5x+2)}{\sqrt{2x+1}}$.
- $-\cos(\cos x) \sin x$.
- $\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$.
- $-9 \cos(3x)$.
- $-10 \cot(5\theta) \csc^2(5\theta)$.
- $6w(w^2 + 1)^2(w^3 - 1)(2w^3 + w - 1)$.
- $3x^2(2x^3 + 1)$.
- $2 \sin x \cos x - 2 \cos x \sin x = 0$.
- 0 (la derivada incluye $\cos(\pi/2)$).

Propuestos de Aplicación

- $12/\sqrt{26} \approx 2,35$ km/h.
- 288 micras/s.
- 2000π mm³/s.
- 1,06 ablación/ángulo.
- $16/3 \approx 5,33$ kPa/min.
- 1 nodo/ms.
- $-15/8 = -1,875$ lúmenes/mm.
- 0 anomalía/rad (coseno de π medios).
- 324 hashes/bloque.
- 12 dB/viento.
- $\pi\sqrt{3}$ MPa/p.
- 1,5 mm/grado.
- 192 pársecs/s.
- $-\sqrt{\pi}$ corrosión/mol.
- $-15/4 = -3,75$ GB/V.
- $\sqrt{3}/8$ fatiga/rad.
- 80 hectáreas/grado.
- No derivable (diverge en origen).
- 0 turbulencia acústica.
- $2/(\sqrt[3]{2}) \approx 1,58$ grays/mg.

¡El Eslabón Perfecto!

'Un problema complejo rara vez se resuelve de un solo golpe. Se desentraña capa por capa, desde la superficie hasta el núcleo. En el cálculo, como en la vida, el éxito radica en no olvidar multiplicar el valor de tus acciones internas.'

- La regla universal del crecimiento constante

¡Enhorabuena! Has dominado el motor algorítmico más poderoso de todo el cálculo diferencial.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

du