CÁLCULO DE UNA VARIABLE

LA DERIVADA

COMO FUNCIÓN Y LÍMITE

CUADERNO DE TRABAJO

Cociente Diferencial y Velocidad Instantánea

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Límite de la Razón de Cambio

El cálculo diferencial nace de resolver un problema aparentemente imposible: medir la velocidad de un objeto en un único e indivisible instante de tiempo, o determinar la pendiente exacta de una curva en un solo punto geométrico. Para lograrlo, hacemos colapsar una recta secante en una recta tangente mediante un límite.

1. El Cociente Diferencial y la Derivada en un Punto

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a. La **derivada de f en a**, denotada por $f'(a)$, es el límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista. Geométricamente, representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

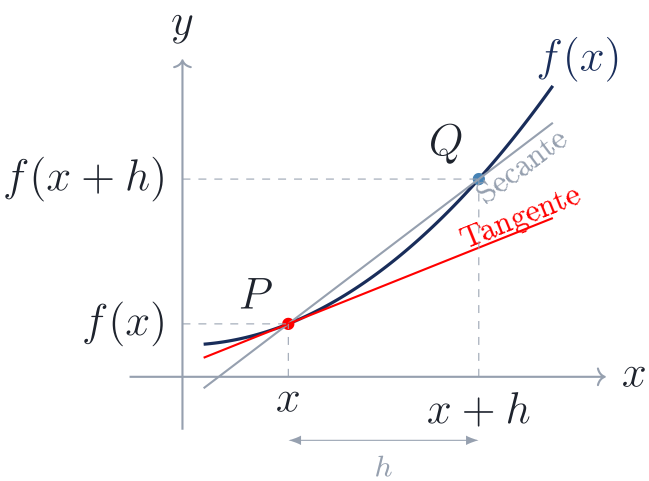
PROFE TEO
¡Mucho cuidado! El cociente diferencial siempre arranca con la forma indeterminada $0/0$ cuando $h \to 0$. Tu misión de vida en cada problema es simplificar la h del denominador algebraicamente.

2. La Derivada como Función

Si cambiamos el punto fijo a por una variable independiente x, la derivada se convierte en una nueva función analítica $f'(x)$ definida por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El dominio de $f'(x)$ es el conjunto de todos los puntos del dominio de f donde el límite existe. Si $f'(x)$ existe, decimos que f es **derivable** o diferenciable.



PROFE TEO
Física pura: La velocidad promedio es la pendiente de la secante $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Cuando obligas a que $\Delta t \to 0$, esa secante se fusiona con la curva dando la velocidad instantánea.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Derivada de una Raíz

Enunciado: Utilice la definición por límite para hallar $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}$.
Solución: Planteamos el límite del cociente diferencial:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Multiplicamos por la conjugada del numerador para levantar la indeterminación:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Problema Resuelto 2: Polinomio Cúbico

Enunciado: Determine la función derivada de $f(x) = x^3 - 2x$ aplicando la definición formal.
Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - 2(x+h)] - (x^3 - 2x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 - 2) = 3x^2 - 2$$

PROFE TEO

¡Error clásico de álgebra! Al expandir $(x+h)^3$, muchos olvidan los términos del medio. Recuerda el binomio de Newton: $x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

Problema Resuelto 3: Derivabilidad en Funciones a Trozos

Enunciado: Analice si $f(x) = \{x^2 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0\,;\, 0 \text{ si } x = 0\}$ es derivable en $x = 0$.
Solución: Evaluamos el límite de la definición en el punto crítico $a = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Por el Teorema del Sándwich, como $-1 \leq \sin(1/h) \leq 1$, multiplicando por h vemos que el límite converge exactamente a 0. Por lo tanto, la función es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

Problema Resuelto 4: No Derivabilidad por Puntos Angulosos

Enunciado: Demuestre empleando límites laterales que $f(x) = |x-3|$ no es derivable en $x = 3$.

Solución: Analizamos los límites laterales del cociente diferencial en $a = 3$: Por la derecha ($h \to 0^+$): $\lim_{h\to 0^+} \frac{|3+h-3|-|3-3|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$. Por la izquierda ($h \to 0^-$): $\lim_{h\to 0^-} \frac{|3+h-3|-|3-3|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$. Como los límites laterales difieren ($1 \neq -1$), el límite general no existe; la función no es derivable en $x = 3$.

Problema Resuelto 5: Función Racional Avanzada

Enunciado: Calcule $f'(x)$ por definición para la función fraccionaria $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+1)-(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h+1)(x+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

PROFE TEO

La continuidad es un requisito obligatorio pero no suficiente para la derivabilidad. Las gráficas con *puntas* o *picos* agudos como los valores absolutos no tienen tangente única.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Monitoreo de Misiles

Contexto: Un proyectil balístico experimental sigue una trayectoria vertical regulada por la ecuación posicional $s(t) = 5t^2 + 2t$ metros. Determine analíticamente la velocidad instantánea exacta del artefacto militar justo al registrarse el cuarto segundo de su ignición en rampa.
Solución: La velocidad instantánea es $s'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{s(4+h)-s(4)}{h}$.

$$s'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{[5(4+h)^2 + 2(4+h)] - [5(16) + 2(4)]}{h}$$

$$s'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{5(16+8h+h^2) + 8 + 2h - 88}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{42h + 5h^2}{h} = 42 \text{ m/s}$$

Aplicación 2: Disipación Térmica Criotécnica

Contexto: El enfriamiento volumétrico de un núcleo magnético superconductor disipa calor según la función $T(t) = 100 - t^2$ Kelvin. Calcule la tasa de variación instantánea del flujo calórico cuando el cronómetro marca exactamente tres segundos térmicos operativos.
Solución:

$$T'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{[100 - (3+h)^2] - [100 - 9]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-6h - h^2}{h} = -6 \text{ K/s}$$

Respuesta: El núcleo se enfría a una tasa instantánea de 6 Kelvin por segundo.

PROFE TEO
Recuerda interpretar el signo de tu derivada en física: un valor positivo significa acumulación o aumento, mientras que una tasa negativa implica decremento o vaciado estructural.

Aplicación 3: Amperaje Eléctrico Variable

Contexto: La carga eléctrica neta acumulada en las placas de un microcondensador electrónico de grafeno se comporta como $Q(t) = t^3$ culombios. Deduzca el amperaje eléctrico instantáneo inducido en el circuito en el segundo número dos.
Solución: El amperaje es la derivada de la carga $I(t) = Q'(t)$. Evaluamos en $t = 2$:

$$Q'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = 12 \text{ A}$$

Respuesta: Fluye una intensidad de corriente eléctrica instantánea de 12 Amperios.

Aplicación 4: Drenaje Hidrodinámico de Presas

Contexto: El volumen remanente de agua filtrada en una esclusa de contención se vacía obedeciendo a $V(t) = \frac{10}{t}$ metros cúbicos. Estime la tasa instantánea de descarga hídrica del drenaje al cumplirse cinco minutos de apertura.
Solución:

$$V'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{10}{5+h} - \frac{10}{5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{10-2(5+h)}{5+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h(5+h)} = -0{,}4$$

Respuesta: El volumen disminuye a un ritmo instantáneo de 0.4 metros cúbicos por minuto.

Aplicación 5: Cinética de Reacciones Biológicas

Contexto: La biomasa total de un agente viral inoculado en un tejido sintético celular progresa bajo la ecuación métrica $M(t) = \sqrt{t}$ gramos. Calcule la velocidad instantánea de infección patológica transcurridas cuatro horas.
Solución: Buscamos la derivada por definición en el punto $a = 4$:

$$M'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ g/h}$$

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué el cociente de incrementos $\Delta y/\Delta x$ solo calcula tasas promedio, mientras que el operador de límite introduce la instantaneidad?
2. Si una función es discontinua en un punto $x = c$, ¿es posible que sea derivable en dicho punto? Justifique mediante el contrarrecíproco del teorema de derivabilidad.
3. Explique detalladamente el significado físico y geométrico de la variable de aproximación h empleada en el límite del cociente diferencial.
4. Si las rectas secantes a una curva poseen pendientes negativas antes de colapsar, ¿puede la recta tangente final tener pendiente positiva? Grafique un ejemplo intuitivo.
5. Describa la diferencia entre interpretar a la derivada como un número real fijo $f'(a)$ versus interpretarla como una regla de correspondencia funcional $f'(x)$.
6. Si la posición de una partícula arroja una gráfica lineal recta, ¿qué conclusiones puede deducir inmediatamente sobre su velocidad instantánea y su aceleración?
7. Analice la función cúbica general $f(x) = x^{1/3}$. ¿Por qué no es derivable en el origen a pesar de ser perfectamente continua y suave en dicho punto?
8. Si $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existe, ¿garantiza esto siempre la derivabilidad de la función en $x = a$? Investigue el caso del valor absoluto.
9. ¿Qué unidades físicas poseerá la función derivada si la variable independiente mide hectáreas agrícolas y la dependiente mide toneladas métricas de grano?
10. Si el límite de un cociente diferencial da como resultado $+\infty$, ¿existe la derivada en ese punto? ¿Qué ocurre con la geometría de la recta tangente?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle $f'(x)$ por definición para la función cuadrática $f(x) = 5x^2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Planteamos la ecuación del límite: $\lim_{h\to 0} \frac{5(x+h)^2 - \underline{\qquad\qquad}}{h}$.
2. Expandimos el binomio de la parte superior: $\lim_{h\to 0} \frac{5(x^2+2xh+h^2)-5x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\underline{\qquad\qquad} + 5h^2}{h}$.
3. Factorizamos h y cancelamos el denominador: $\lim_{h\to 0}(10x + 5h) = \underline{\qquad\qquad}$.

Problema 2. Obtenga la derivada por límite de la función racional $f(x) = \frac{3}{x}$ en todo su dominio.

Guía de Solución Interactiva

1. Estructuramos el cociente diferencial: $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{x+h} - \frac{3}{\underline{\qquad}}}{h}$.
2. Efectuamos la resta de fracciones del numerador: $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{3x-3(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\underline{\qquad}}{h\cdot x(x+h)}$.
3. Simplificamos h y calculamos el límite final, lo que nos da como resultado: $\underline{\qquad\qquad}$.

Problema 3. Halle $f'(x)$ analíticamente por definición de límite para $f(x) = \sqrt{x+4}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Escribimos la expresión formal: $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+4} - \sqrt{\underline{\qquad\qquad}}}{h}$.
2. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada: $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h+4)-(x+4)}{h(\sqrt{x+h+4}+\sqrt{x+4})} = \lim_{h\to 0} \frac{\underline{\qquad}}{h(\sqrt{x+h+4}+\sqrt{x+4})}$.
3. Evaluamos disolviendo la indeterminación: $f'(x) = \underline{\qquad\qquad}$.

PROFE TEO
Para resolver raíces cúbicas por definición, recuerda la identidad de diferencia de cubos: $A - B = \frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}$. ¡Te salvará la vida!

Problemas Generales Algebraicos

Problema 4. Calcule por definición la derivada de $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$.

Problema 5. Halle la derivada de $f(x) = 2x^3 + 1$ aplicando límites.

Problema 6. Determine la pendiente de la tangente a $y = \frac{2}{x-1}$ en el punto donde $x = 3$.

Problema 7. Resuelva la función derivada por definición para $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

Problema 8. Halle $f'(x)$ aplicando el método del límite para la función radical $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Problema 9. Evalúe la derivabilidad en el origen para la función simétrica $f(x) = x|x|$.

Problema 10. Demuestre analíticamente si $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ es derivable o no en su punto de inflexión $x = 1$.

Problema 11. Calcule la derivada de la función trigonométrica $f(x) = \sin(x)$ usando el límite notable.

Problema 12. Obtenga la derivada por definición para $f(x) = \cos(x)$.

Problema 13. Analice la derivabilidad en $x = 2$ de la función a trozos $f(x) = \{3x^2 \text{ si } x \leq 2\,;\, 12x - 12 \text{ si } x > 2\}$.

Problema 14. Halle por definición de límite la función derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Problema 15. Determine $f'(x)$ mediante cociente diferencial para la estructura compleja $f(x) = x\sqrt{x}$.

Problema 16. Pruebe si la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es diferenciable en sus raíces reales.

Problema 17. Calcule $f'(1)$ por límites si $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Problema 18. Halle la derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ usando la definición formal de límite.

Problema 19. Evalúe el límite del cociente diferencial para la función exponencial nativa $f(x) = e^x$.

Problema 20. Calcule el valor exacto de la derivada de la función racionalizada avanzada $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ en el origen.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un dron aeroespacial de reconocimiento se eleva verticalmente acumulando una altitud medida por $s(t) = 3t^2$ metros. Calcule mediante el límite del cociente diferencial su velocidad instantánea exacta al segundo número cinco de su despegue.

Guía de Solución Interactiva

1. Estructuramos la velocidad instantánea como: $\lim_{h\to 0} \frac{3(5+h)^2 - 3(\underline{\hspace{1.5cm}})^2}{h}$. 2. Expandimos algebraicamente la ecuación superior: $\lim_{h\to 0} \frac{30h+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(\underline{\hspace{1.5cm}} + 3h)$. 3. La velocidad instantánea del fuselaje del dron es de ________ metros por segundo.

Problema 2. El enfriamiento de un tanque de nitrógeno líquido industrial drena calor variando su temperatura según la función $T(t) = \frac{40}{t}$ Celsius. Deduzca la velocidad instantánea de enfriamiento al cuarto minuto.

Guía de Solución Interactiva

1. Escribimos el límite fraccionario formal: $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{40}{4+h} - \frac{40}{\underline{\hspace{1.5cm}}}}{h}$. 2. Operamos los extremos de la fracción compuesta: $\lim_{h\to 0} \frac{-10h}{h(4+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\underline{\hspace{1.5cm}}}{4+h}$. 3. La tasa de variación calórica instantánea del refrigerante es de ________ grados por minuto.

Problema 3. El flujo de corriente que recarga los bancos de una estación de energía fotovoltaica acumula carga eléctrica según $Q(t) = \sqrt{t}$ culombios. Obtenga el amperaje instantáneo exacto tras un segundo de conexión.

Guía de Solución Interactiva

1. Planteamos la ecuación límite del amperaje: $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \underline{\hspace{1.5cm}}}{h}$. 2. Multiplicamos por la respectiva conjugada radical: $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\underline{\hspace{2cm}}}$. 3. Evaluando la corriente eléctrica, el resultado arroja un amperaje de ________ Amperios.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una cápsula de rescate marítimo se hunde en una fosa hidrodinámica vertical registrando una profundidad de $s(t) = 2t^2 + 8t$ metros. Defina analíticamente la velocidad instantánea de inmersión del habitáculo al cabo de tres segundos exactos de descenso.

Problema 5. La presión neumática interna de un neumático de carreras de alta competencia se incrementa por fricción siguiendo el modelo $P(x) = 2x^2$ kilopascales. Determine la tasa instantánea de inflación de presión en el instante de registrarse la unidad de tiempo base.

Problema 6. El volumen de combustible inflamable consumido por el motor térmico de un generador estacionario de energía se vacía según $V(t) = 50 - 4t^2$ litros. Evalúe analíticamente el gasto de consumo instantáneo al segundo número tres.

Problema 7. Una reacción química endotérmica controlada en laboratorio genera una masa de precipitado cristalino calculada por $M(x) = x^3$ gramos. Calcule mediante la definición formal de la derivada la velocidad de cristalización instantánea al segundo número tres.

Problema 8. El cableado de alta tensión de una red ferroviaria urbana se dilata por calentamiento resistivo extendiendo su longitud lineal según $L(t) = 100 + 0{,}5t^2$ milímetros. Halle la tasa de expansión instantánea al décimo segundo.

Problema 9. El vaciado hidráulico de seguridad de una piscina olímpica drena su contenido líquido arrojando un volumen remanente de $V(t) = \frac{50}{t}$ metros cúbicos. Calcule el caudal de descarga instantánea exactamente al décimo minuto.

Problema 10. Un algoritmo de optimización para redes neuronales artificiales reduce su función de pérdida estadística según el modelo de aprendizaje continuo $E(w) = \frac{1}{w}$ bits. Determine la tasa de convergencia instantánea en el peso de entrenamiento dos.

Problema 11. La proliferación celular de una población bacteriana en una placa de cultivo biológico progresa en biomasa según la ley radical $B(t) = \sqrt{t+9}$ miligramos. Calcule la velocidad instantánea de reproducción biológica al transcurrir siete horas.

Problema 12. La propagación del eco acústico generado por un sonar submarino en un estrato geológico oceánico recorre una distancia lineal dada por $d(t) = 1500t$ metros. Deduzca la velocidad sónica instantánea de propagación en cualquier milisegundo.

Problema 13. La fuerza de frenado magnético inercial que detiene un prototipo de tren de levitación súper-conductor disipa Newton-segundos bajo el modelo dinámico $F(v) = v^2 + 4v$. Precise la variación instantánea de la fuerza magnética a una velocidad de tres metros por segundo.

Problema 14. El estrés de tensión mecánica estructural soportado por los tirantes de acero de un puente atirantado aumenta durante un sismo según la función $\sigma(t) = 4t^2 + t$ megapascales. Calcule la tasa de estrés instantáneo al quinto segundo.

Problema 15. Una startup de robótica industrial mide el desgaste milimétrico del eje de fricción de un rodamiento mecánico mediante la función lineal analítica $D(x) = 0{,}05x$. Encuentre la velocidad instantánea de abrasión metálica estructural.

Problema 16. El campo de inducción magnética generado en el núcleo toroidal de un solenoide de alta potencia aumenta continuamente según $B(t) = t^3 + 2t$ teslas. Calcule la tasa de inducción electromagnética instantánea al transcurrir el primer segundo.

Problema 17. Un sismógrafo digital de alta precisión registra el desplazamiento ondulatorio de una falla geológica activa mediante la función trigonométrica $s(t) = \sin(t)$ milímetros. Evalúe analíticamente la velocidad sísmica instantánea en el instante angular pi radianes.

Problema 18. La cantidad de memoria volátil caché consumida de manera transitoria por un servidor en la nube de procesamiento masivo escala según $M(t) = 2t^3$ megabytes. Obtenga la velocidad instantánea de almacenamiento informático en el segundo cuatro.

Problema 19. La absorción de energía lumínica por parte de una celda solar fotovoltaica genera una potencia eléctrica que se comporta según $P(v) = \frac{x}{x+1}$ vatios. Deduzca la tasa instantánea de rendimiento energético en el voltio uno.

Problema 20. La trayectoria parabólica balística de escape descrita por un cohete de sonda atmosférica meteorológica se eleva acumulando metros según $s(t) = t^3 + 5t^2$. Calcule la velocidad instantánea del fuselaje al segundo número dos.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $8x - 3$.
2. $6x^2$.
3. $-1/2$.
4. $\frac{2}{(x+2)^2}$.
5. $-\frac{1}{2x^{3/2}}$.
6. 0 (Límites laterales dan 0, derivable).
7. No existe (Polo asintótico vertical).
8. $\cos(x)$.
9. $-\sin(x)$.
10. Existe, $f'(2) = 12$ (Límites de tramos coinciden).
11. $-\frac{2}{x^3}$.
12. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$.
13. No es derivable en $x = \pm 3$ (Puntos angulosos).
14. $1/2$.
15. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
16. e^x.
17. 1.

Propuestos de Aplicación

1. 30 m/s.
2. −2,5 C/min.
3. 0,5 A.
4. 20 m/s.
5. 4 kPa/s.
6. −24 L/s (Tasa de consumo: 24 L/s).
7. 27 g/s.
8. 10 mm/s.
9. −0,5 m^3/min (Descarga: 0.5 m^3/min).
10. −0,25 bits/peso.
11. 0,125 mg/h.
12. 1500 m/s.
13. 10 N/(m/s).
14. 41 MPa/s.
15. 0,05 mm/unidad.
16. 5 T/s.
17. −1 mm/s.
18. 96 MB/s.
19. 0,25 W/V.
20. 32 m/s.

$\Delta t \to 0$

¡Velocidad Alcanzada!

'No midas únicamente tu progreso mediante promedios globales estáticos; el verdadero éxito radica en la capacidad analítica de transformar cada instante en una fuerza de aceleración constante.'

- La física del cambio continuo

¡Felicidades! Has dominado el límite del cociente diferencial. Estás listo para calcular la tasa de cambio de cualquier sistema del universo.

$f'(x)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com