PRECÁLCULO

GRÁFICAS DE ECUACIONES

CUADERNO DE TRABAJO

Intersecciones y Pruebas de Simetría

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Intersecciones y Simetría

Para graficar una ecuación no necesitas tabular cientos de puntos. Basta con conocer sus puntos críticos clave (las intersecciones con los ejes) y observar si tiene algún efecto *espejo* (simetría) para duplicar la gráfica con el mínimo esfuerzo.

PROFE TEO
¡Cuidado! Para hallar la intersección x, igualamos $y = 0$. Muchos estudiantes igualan $x = 0$ por inercia y terminan hallando el eje equivocado.

1. Intersecciones con los Ejes

Son los puntos donde la gráfica cruza los ejes coordenados.

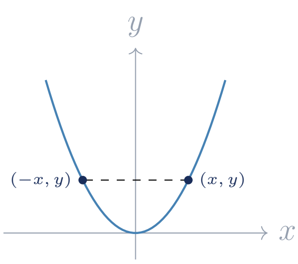
- **Intersección con el eje x:** Ocurre cuando la gráfica toca el piso. Haga $\boldsymbol{y = 0}$ y resuelva para x. Las coordenadas son de la forma $(x, 0)$.
- **Intersección con el eje y:** Ocurre cuando la gráfica cruza la pared vertical. Haga $\boldsymbol{x = 0}$ y resuelva para y. Las coordenadas son de la forma $(0, y)$.

2. Pruebas de Simetría (El efecto Espejo)

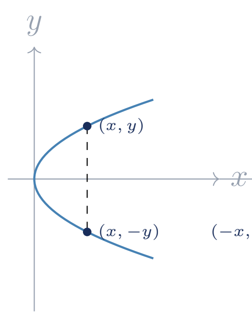
Una gráfica es simétrica si al doblar el papel sobre un eje, ambas mitades coinciden exactamente.

- **Simetría respecto al eje y (Espejo vertical):**
  Sustituya x por $-x$. Si la ecuación **no cambia**, hay simetría. (Para cada (x, y) existe un $(-x, y)$). Estas suelen llamarse funciones *pares*.
- **Simetría respecto al eje x (Espejo horizontal):**
  Sustituya y por $-y$. Si la ecuación **no cambia**, hay simetría. (Para cada (x, y) existe un $(x, -y)$). *Nota: Rara vez son funciones.*
- **Simetría respecto al origen (Doble doblez):**
  Sustituya simultáneamente x por $-x$ y y por $-y$. Si la ecuación **no cambia**, hay simetría central. (Para cada (x, y) existe un $(-x, -y)$). Estas suelen llamarse funciones *impares*.

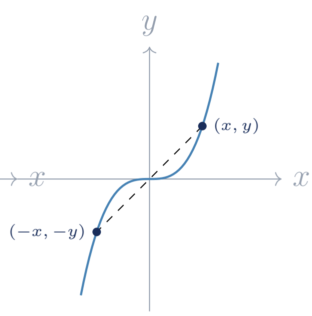
PROFE TEO
Un truco visual: Si todos los exponentes de x son pares, casi seguro es simétrica al eje y. Si tienes un círculo $x^2 + y^2 = r^2$, ¡tiene las tres simetrías!



Simetría Eje Y



Simetría Eje X



Simetría Origen

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Intersecciones Lineales

Enunciado: Halle las intersecciones de $3x - 4y = 12$.
Solución: Intersección x (hacer $y = 0$): $3x - 4(0) = 12 \implies 3x = 12 \implies x = 4$. Punto: $(4, 0)$.
Intersección y (hacer $x = 0$): $3(0) - 4y = 12 \implies -4y = 12 \implies y = -3$. Punto: $(0, -3)$.

Problema Resuelto 2: Simetría Par (Eje Y)

Enunciado: Determine la simetría de la ecuación $y = x^2 - 4$.
Solución: Probamos Eje Y (cambiar x por $-x$): $y = (-x)^2 - 4 \implies y = x^2 - 4$.
La ecuación es idéntica a la original. **Sí** tiene simetría respecto al eje Y.

Problema Resuelto 3: Simetría Impar (Origen)

Enunciado: Analice la simetría de $y = x^3 - x$.
Solución: Eje Y: $y = (-x)^3 - (-x) \implies y = -x^3 + x$ (Cambió, No).
Eje X: $-y = x^3 - x \implies y = -x^3 + x$ (Cambió, No).
Origen: $-y = (-x)^3 - (-x) \implies -y = -x^3 + x$. Multiplicamos por -1: $y = x^3 - x$.
¡Es idéntica! **Sí** tiene simetría respecto al origen.

Problema Resuelto 4: Valor Absoluto y Ejes

Enunciado: Halle intersecciones y simetría de $x = |y| - 2$.
Solución: Intersección y ($x = 0$): $0 = |y| - 2 \implies |y| = 2 \implies y = \pm 2$. Puntos: $(0, 2), (0, -2)$.
Intersección x ($y = 0$): $x = |0| - 2 \implies x = -2$. Punto: $(-2, 0)$.
Simetría Eje X ($y \to -y$): $x = |-y| - 2 \implies x = |y| - 2$. (Sí, es simétrica al eje x).

PROFE TEO
En el Problema 3, multiplicar por -1 al final es la clave. Si la ecuación recupera su forma original, la simetría de origen está confirmada.

Problema Resuelto 5: Ecuación Circunferencial

Enunciado: Analice $x^2 + y^2 = 25$.
Solución: Eje X ($y \to -y$): $x^2 + (-y)^2 = 25 \implies x^2 + y^2 = 25$ (Sí).
Eje Y ($x \to -x$): $(-x)^2 + y^2 = 25 \implies x^2 + y^2 = 25$ (Sí).
Origen ($x \to -x, y \to -y$): $(-x)^2 + (-y)^2 = 25 \implies x^2 + y^2 = 25$ (Sí).
Intersecciones: $(\pm 5, 0)$ y $(0, \pm 5)$.
Posee las tres simetrías simultáneamente.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Órbita Espacial

Contexto: Un satélite orbita siguiendo la ecuación hiperbólica $x^2 - y^2 = 100$. Un operador necesita saber si la ruta tiene simetría central para programar antenas duales. Analice la simetría respecto al origen.
Solución: Cambiamos x por $-x$ e y por $-y$.
$(-x)^2 - (-y)^2 = 100 \implies x^2 - y^2 = 100$.
Respuesta: Sí, al obtener la misma ecuación, la órbita tiene simetría perfecta respecto al origen, permitiendo la programación dual.

Aplicación 2: Diseño de Arcos

Contexto: Un puente colgante se diseña con un cable parabólico de ecuación $y = 0{,}05x^2 + 10$. El piso del puente es el eje x. Halle las intersecciones con el eje x para ubicar anclajes.
Solución: Igualamos $y = 0$.
$0 = 0{,}05x^2 + 10 \implies -10 = 0{,}05x^2 \implies x^2 = -200$.
Respuesta: Como un cuadrado no puede ser negativo en reales, no hay intersección x. El cable no toca el piso del puente.

Aplicación 3: Acústica Direccional

Contexto: Un micrófono omnidireccional capta sonido en un patrón circular modelado por $x^2 + y^2 = 36$. Halle los puntos de intersección en los ejes para colocar cuatro filtros de ruido acústico.
Solución: Intersección x ($y = 0$): $x^2 = 36 \implies x = \pm 6$.
Intersección y ($x = 0$): $y^2 = 36 \implies y = \pm 6$.
Respuesta: Los filtros van en $(6, 0)$, $(-6, 0)$, $(0, 6)$ y $(0, -6)$.

Aplicación 4: Espejos Ópticos

Contexto: El perfil de un reflector solar obedece la función $x = 0{,}1y^2$. Para que el reflejo sea uniforme, el diseño debe ser simétrico respecto al eje horizontal. Compruebe algebraicamente esta simetría.
Solución: El eje horizontal es el eje x. Reemplazamos y por $-y$.
$x = 0{,}1(-y)^2 \implies x = 0{,}1y^2$.
Respuesta: La ecuación no se altera; por ende, el reflector posee simetría horizontal garantizando un reflejo térmico uniforme.

PROFE TEO
En modelos físicos, la simetría nos ahorra material. Si diseñas la mitad derecha de una lente simétrica, la computadora genera la izquierda automáticamente.

Aplicación 5: Dinámica Poblacional

Contexto: En un entorno controlado, la población de bacterias se modela como $P = \frac{100}{t+2}$, donde t es el tiempo en horas y P la densidad. Halle la intersección con el eje P y su significado.
Solución: El eje P actúa como eje y. Hacemos $t = 0$.
$P = \frac{100}{0+2} = 50$.
Respuesta: La intersección es $(0, 50)$. Significa que en el instante inicial (tiempo cero), la densidad bacteriana era de 50 unidades.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos analíticos o gráficos.

1. Si una gráfica cruza el eje x en el punto $(5, 0)$ y tiene simetría respecto al eje y, ¿qué otro punto de intersección está garantizado geométricamente?
2. Explique por qué una ecuación que representa una función (donde a cada x le corresponde un solo y) jamás puede tener simetría respecto al eje x, salvo que sea la función $y = 0$.
3. Demuestre lógicamente por qué si una gráfica posee simetría respecto al eje x y también respecto al eje y, obligatoriamente tendrá simetría respecto al origen.
4. Un estudiante afirma que la ecuación $y = 2x + 1$ es simétrica respecto al origen porque las rectas cruzan el origen. Refute esta afirmación hallando su intersección real.
5. Al evaluar la intersección con el eje y de la ecuación $x^2 + y^2 = -4$, ¿qué resultado algebraico obtenemos y qué significa esto en el plano real?
6. En el análisis de $y = |x|$, si reemplazamos x por $-x$, obtenemos $y = |-x| = |x|$. ¿Qué tipo de simetría indica esto y cómo se visualiza?
7. ¿Es posible que una gráfica no intercepte a ningún eje pero posea simetría respecto al origen? Justifique usando la función $y = 1/x$.
8. Si al buscar las intersecciones de $y = ax^2 + bx + c$ hacemos $y = 0$, estamos resolviendo una ecuación cuadrática. ¿Qué indica el discriminante negativo sobre la gráfica?
9. ¿Por qué la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ no es simétrica al eje y, a pesar de que la variable x está elevada al cuadrado?
10. En un contexto físico, si el eje x es el tiempo y el eje y la altura, ¿por qué carece de sentido práctico buscar simetría respecto al eje y (tiempos negativos)?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle las intersecciones con los ejes para $2x + 5y = 10$.

Guía de Solución Interactiva

1. Intersección x (haz $y = 0$):
$2x + 5(\_\_\_\_) = 10 \implies 2x = 10 \implies x = \_\_\_\_$. Punto: $(\_\_\_\_, 0)$.

2. Intersección y (haz $x = 0$):
$2(\_\_\_\_) + 5y = 10 \implies 5y = 10 \implies y = \_\_\_\_$. Punto: $(0, \_\_\_\_)$.

Problema 2. Verifique si $y = x^4 - 2x^2$ tiene simetría respecto al eje y.

Guía de Solución Interactiva

1. Reemplaza x por $-x$:
$y = (\_\_\_\_)^4 - 2(\_\_\_\_)^2$

2. Aplica propiedades de potencias pares:
$y = \_\_\_\_ - 2\_\_\_\_$

3. Compara: La ecuación es ____________ a la original.
¿Tiene simetría eje Y?: ________

Problema 3. Analice si $y = x^3$ tiene simetría respecto al origen.

Guía de Solución Interactiva

1. Reemplaza x por $-x$ e y por $-y$:
$\_\_\_\_ = (\_\_\_\_)^3 \implies -y = \_\_\_\_$

2. Multiplica ambos lados por -1:
$y = \_\_\_\_$

3. Conclusión: La ecuación resulta ____________.
¿Simétrica al origen?: ________

PROFE TEO
El error fatal es olvidar los paréntesis al reemplazar. Escribir $-x^2$ no es lo mismo que $(-x)^2$. ¡Cuidado con el álgebra básica!

Problemas Generales (Nivel Medio a Avanzado)

Problema 4. Halle intersecciones de $4x - y = 8$.

Problema 5. Halle intersecciones de $y = x^2 - x - 6$.

Problema 6. Halle intersecciones de $y = \sqrt{x-4}$.

Problema 7. Halle intersecciones de $x^2 + y^2 = 16$.

Problema 8. Analice simetría Eje Y: $y = 3x^2 + 5$.

Problema 9. Analice simetría Eje X: $x = y^2 - 4$.

Problema 10. Analice simetría Origen: $y = 2x^3 - x$.

Problema 11. Analice todas las simetrías: $x^2y = 10$.

Problema 12. Analice todas las simetrías: $y = \frac{x}{x^2+1}$.

Problema 13. Analice todas las simetrías: $x^2 + xy + y^2 = 0$.

Problema 14. Halle intersecciones y simetría de $y = |x| - 3$.

Problema 15. Halle intersecciones y simetría de $x^2/9 + y^2/4 = 1$.

Problema 16. Analice la gráfica de $y = x^4 - |x|$. ¿Qué simetría tiene?

Problema 17. Halle intersecciones con el eje x de $y = \frac{x^2-9}{x+3}$.

Problema 18. Demuestre que $y = 5x$ es simétrica al origen pero no a los ejes.

Problema 19. Halle las intersecciones de $y = x^3 - 8$.

Problema 20. Analice la simetría de la curva implícita $x^3 + y^3 = 8$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La trayectoria de un submarino robótico obedece a $y = x^2 - 9$ (metros). Calcule dónde el robot rompe la superficie del agua (eje x).

Guía de Solución Interactiva

1. Romper superficie implica igualar la profundidad a cero: $y =$ ____ 2. Resuelve: $0 = x^2 - 9 \implies x^2 =$ ____ $\implies x =$ ____ 3. Puntos de emersión: (____, 0) y (____, 0).

Problema 2. Una máquina de corte láser perfila una chapa bajo la ecuación $x^2 + 4y^2 = 16$. Verifique su simetría horizontal (eje x) para ahorrar programación.

Guía de Solución Interactiva

1. Cambia y por $-y$: $x^2 + 4($____$)^2 = 16$. 2. Simplifica: $x^2 + 4$____ $= 16$. 3. La ecuación es ________. Por tanto, ____ requiere programar la mitad y espejar.

Problema 3. Un modelo financiero de depreciación dicta $V = 50 - 2t$. Halle la intersección temporal donde el valor del activo llega a cero (eje t).

Guía de Solución Interactiva

1. Haz el valor $V =$ ____. 2. Resuelve: $0 = 50 - 2t \implies 2t =$ ____ $\implies t =$ ____. 3. El activo se deprecia totalmente en el año $t =$ ____.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una chimenea geotérmica exuda gases formando un ducto parabólico $y = -0{,}5x^2 + 18$. Encuentre los anchos exactos al nivel del suelo ($y = 0$) para sellarlo.

Problema 5. El aspa de un aerogenerador traza en su giro $x^2 + y^2 = 144$. Determine los puntos máximos de alcance horizontal y vertical interceptando ejes.

Problema 6. La tasa de una reacción en química se grafica como $R = t^3 - t$. Analice si la curva termodinámica posee simetría central respecto al origen.

Problema 7. Un vehículo no tripulado patrulla un área formando la frontera $x = |y| - 5$. Verifique analíticamente si el patrón de vuelo es simétrico lateralmente (eje x).

Problema 8. El chorro de una fuente ornamental sigue la curva de fluidos $y = -x^2 + 4x$. Halle los puntos donde el agua nace y toca el piso.

Problema 9. En un parque de diversiones, un tramo de montaña rusa se modela por $y = x^3$. Verifique si la pendiente invertida garantiza una simetría impar.

Problema 10. La propagación de una onda sísmica profunda obedece a $x^2y = -4$. Pruebe si los sismógrafos detectarán pulsos simétricos en el eje vertical (eje Y).

Problema 11. Un isotopo radiactivo decae según $M = \frac{100}{t+1}$. Calcule la masa inicial de la muestra analizando su intersección con el eje de las ordenadas.

Problema 12. La expansión térmica de un metal estructural genera una curvatura $y = x^4 + 2x^2$. Determine si la dilatación actúa como una función par (simetría Y).

Problema 13. Un cable tensor en un teleférico dibuja un catenoide aproximado por $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Pruebe matemáticamente la simetría de la catenaria respecto al pilar central (eje Y).

Problema 14. En levitación magnética, las líneas de flujo de un superconductor obedecen a $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Verifique si el campo magnético posee simetría total.

Problema 15. La cristalización geométrica de un mineral crea facetas según $|x| + |y| = 4$. Halle las esquinas del cristal calculando todas las intersecciones con los ejes.

Problema 16. La viscosidad de un fluido Newtoniano resbala por una placa perfilada por $x = y^3$. Analice si el flujo presenta simetría respecto al eje axial longitudinal (eje X).

Problema 17. Un panel fotovoltaico oscila buscando luz según $y = \sin(x)$. Analice algebraicamente si el mecanismo de seguimiento posee simetría al origen.

(Asuma $\sin(-x) = -\sin(x)$).

Problema 18. El modelado de tráfico vehicular fluye a través de una glorieta elíptica $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Calcule los puntos de cruce de los ejes viales.

Problema 19. Un chip procesador de señales encripta ondas mediante $y = x^2 - x^4$. Analice la paridad de la onda para determinar si usa algoritmos de espejo vertical.

Problema 20. La erosión costera en un golfo retrocede formando $x^3y^2 = 10$. Justifique lógicamente si el desgaste del acantilado mantiene simetría respecto al eje X.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. Int $x : (5, 0)$, Int $y : (0, 2)$
2. Sí, simétrica al Eje Y.
3. Sí, simétrica al Origen.
4. $(2, 0)$ y $(0, -8)$
5. $(3, 0), (-2, 0)$ y $(0, -6)$
6. $(4, 0)$. No tiene intersección y.
7. $(\pm 4, 0)$ y $(0, \pm 4)$
8. Sí.
9. Sí.
10. Sí.
11. Simétrica Eje Y.
12. Simétrica al Origen.
13. Simétrica al Origen.
14. $(\pm 3, 0), (0, -3)$. Sim. Eje Y.
15. $(\pm 3, 0), (0, \pm 2)$. Todas las simetrías.
16. Eje Y (es una función par).
17. $x = 3$. ($x = -3$ es un hueco).
18. $y = 5x \implies -y = 5(-x) \implies -y = -5x \implies y = 5x$. (Sí al origen).
19. $(2, 0)$ y $(0, -8)$.
20. Ninguna simetría.

Propuestos de Aplicación

1. $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.
2. Idéntica; sí.
3. Año 25.
4. $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. Ancho total 12.
5. $(\pm 12, 0)$ y $(0, \pm 12)$.
6. Sí (simetría al origen).
7. Sí, simetría al eje X.
8. $(0, 0)$ y $(4, 0)$.
9. Sí (impar, simetría al origen).
10. Sí, al reemplazar x por $-x$ queda igual. Simetría eje Y.
11. $(0, 100)$ unidades de masa inicial.
12. Sí, es una función par.
13. Reemplazando x por $-x$ queda igual. Sí.
14. Sí, posee las tres simetrías.
15. $(4, 0), (-4, 0), (0, 4), (0, -4)$.
16. Al cambiar $y \to -y$ cambia de signo. NO es simétrica al eje X.
17. $-y = \sin(-x) \implies -y = -\sin(x) \implies y = \sin(x)$. Sí.
18. $(\pm 5, 0)$ y $(0, \pm 3)$.
19. Función par, sí tiene espejo vertical.
20. Reemplazando $y \to -y$ queda $(-y)^2 = y^2$. Sí.

(x, y)

¡Llegaste al Final!

’Conocer las intersecciones te dice dónde estás parado, pero reconocer la simetría te permite ver el panorama completo con la mitad del esfuerzo.’

- La belleza geométrica

¡Felicidades! Ahora tienes una visión panorámica y analítica superior para cualquier ecuación que se cruce en tu camino.

∞

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com