PRECÁLCULO

FUNCIONES RACIONALES III

CUADERNO DE TRABAJO

Análisis Completo y Esbozo de Curvas

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Mapa del Tesoro Gráfico

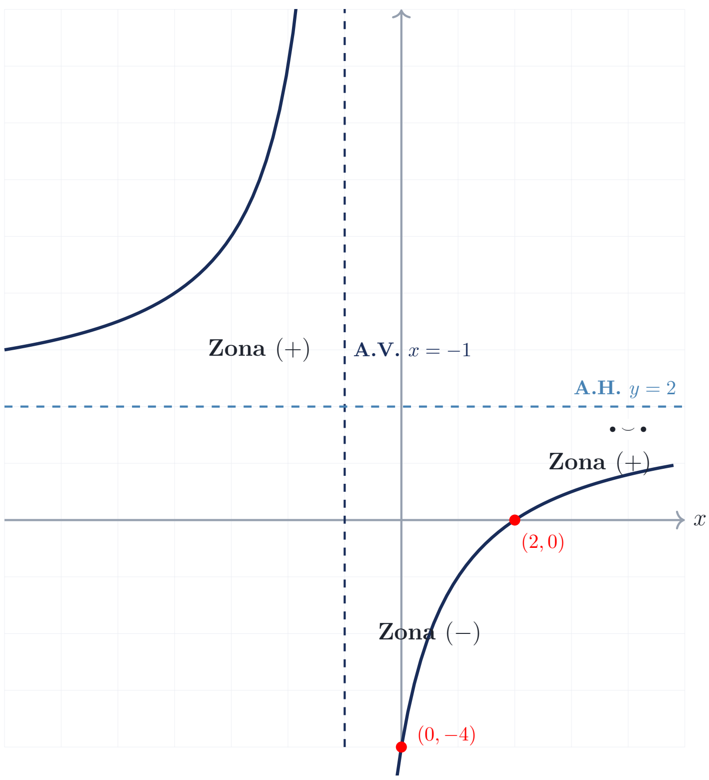
Esbozar una función racional $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ es como armar un rompecabezas. No necesitamos tabular 50 puntos; basta con encontrar las "barreras"(asíntotas) y los .ªnclajes"(intersecciones), para luego analizar el comportamiento de los signos.

PROFE TEO

El Análisis de Signos es tu brújula. Te dice si la curva está flotando por encima del eje X (+) o buceando por debajo (-). ¡Nunca cruces el eje X a menos que haya un anclaje!

Protocolo de Esbozo (Los 6 Pasos)

1. **Factorizar:** Descompón $N(x)$ y $D(x)$. Identifica huecos (factores comunes).
2. **Intersecciones (Anclajes):**
   - Corte Y: Evalúa $f(0)$.
   - Cortes X: Igualamos el numerador (simplificado) a 0.
3. **Asíntotas Verticales (A.V.):** Igualamos el denominador (simplificado) a 0.
4. **Asíntotas Horizontales/Oblicuas:** Compara los grados de $N(x)$ y $D(x)$.
5. **Análisis de Signos (Zonas):** Coloca los cortes X y las A.V. en una recta numérica. Elige un "punto de prueba.en cada intervalo para ver si la gráfica es $(+)$ o $(-)$.
6. **Esbozo:** Traza las asíntotas (líneas punteadas), marca los cortes, y dibuja curvas suaves que respeten los signos y se peguen a las asíntotas.



PROFE TEO

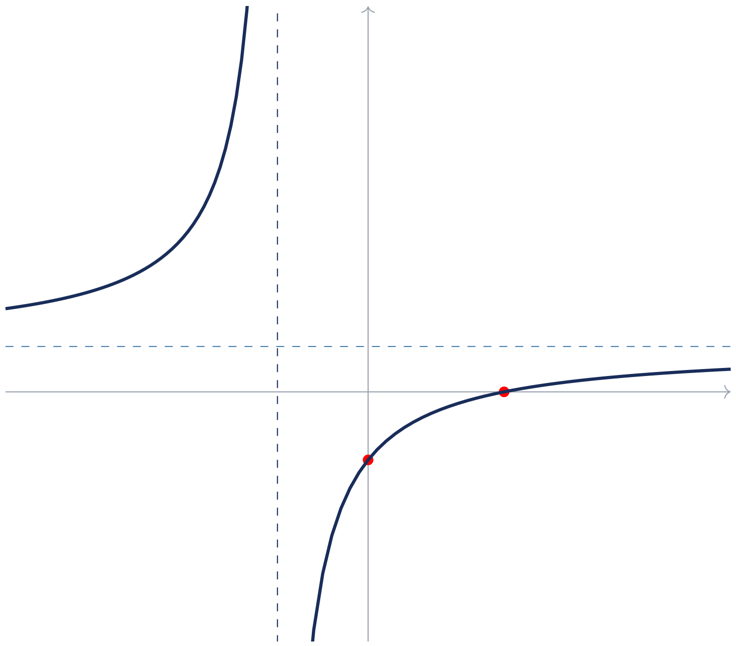
Cuidado con las A.V. de multiplicidad par (ej. $\frac{1}{(x-2)^2}$). Ahí la curva actúa como un volcán: las dos ramas suben al infinito (+) o caen al abismo (-). No hay cambio de signo.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Esbozo Básico (Lineal/Lineal)

Enunciado: Analice y esboce $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$.
Esquema de Solución:

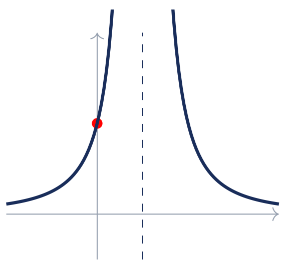
- **Cortes:** En X ($N = 0 \implies x = 3$). En Y ($f(0) = -3/2$).
- **Asíntotas:** A.V. en $x = -2$. A.H. en $y = 1$ (empate de grados).
- **Signos:** Intervalos definidos por $x = -2$ y $x = 3$. $(-\infty, -2) \to (+)$; $(-2, 3) \to (-)$; $(3, \infty) \to (+)$.



Problema Resuelto 2: El Volcán (Multiplicidad Par)

Enunciado: Analice $g(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$.
Esquema de Solución:

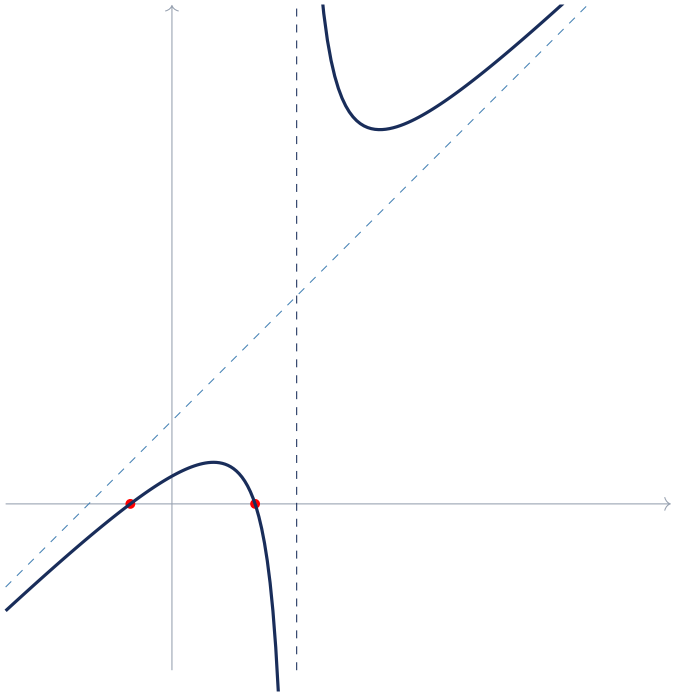
- **Cortes:** En X (No hay, $2 \neq 0$). En Y ($g(0) = 2$).
- **Asíntotas:** A.V. en $x = 1$. A.H. en $y = 0$ ($n < m$).
- **Signos:** El denominador está al cuadrado (siempre positivo). Numerador positivo. Toda la gráfica es $(+)$. Ambas ramas suben.



Problema Resuelto 3: Esbozo con Asíntota Oblicua

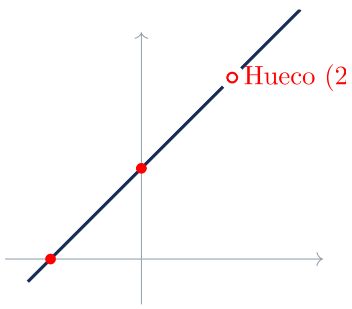
Enunciado: Analice $h(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$.
Esquema de Solución:

- **Cortes:** $N(x) = (x-2)(x+1) = 0 \implies x = 2, -1$. Y: $h(0) = 2/3$.
- **Asíntotas:** A.V. $x = 3$. División larga da A.O. $y = x + 2$.
- **Signos:** Zonas en $-1, 2, 3$. Signos: $(-), (+), (-), (+)$.



Problema Resuelto 4: Hueco en la Gráfica

Enunciado: Esboce $p(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.
Esquema de Solución: Factorizamos: $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$. (Hueco en $x = 2$). La gráfica es idéntica a la recta $y = x + 2$, pero perforada en el punto $(2, 4)$. No hay A.V. ni A.H.



····▷
PROFE TEO
Trazar curvas oblicuas es divertido. Dibuja la recta en diagonal y haz que la curva hiperbólica se .ªbrace.ª ella en los extremos del infinito.

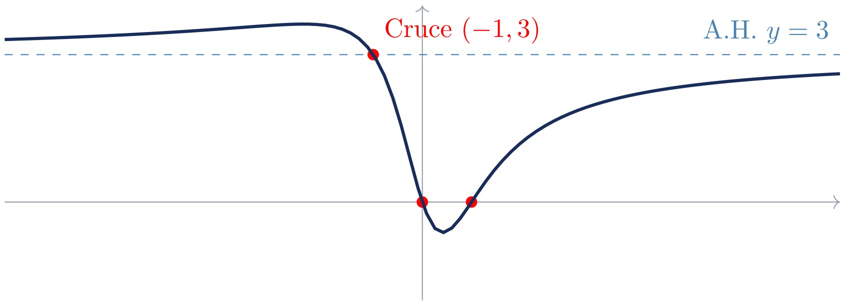
Problema Resuelto 5: Cruce de la Asíntota Horizontal

Enunciado: Analice si $f(x) = \frac{3x^2-3x}{x^2+1}$ cruza su A.H.

Esquema de Solución: A.H.: $y = 3$. Igualamos función a la A.H.: $\frac{3x^2-3x}{x^2+1} = 3$.

Resolvemos: $3x^2 - 3x = 3x^2 + 3 \implies -3x = 3 \implies x = -1$.

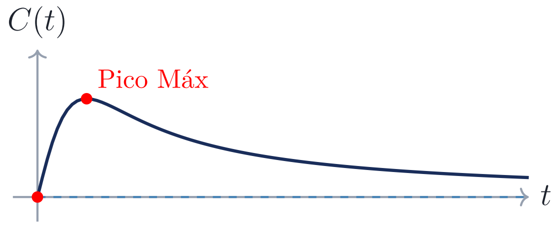
Esbozo: Cruza la A.H. en $(-1, 3)$. Corta X en 0 y 1.



Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

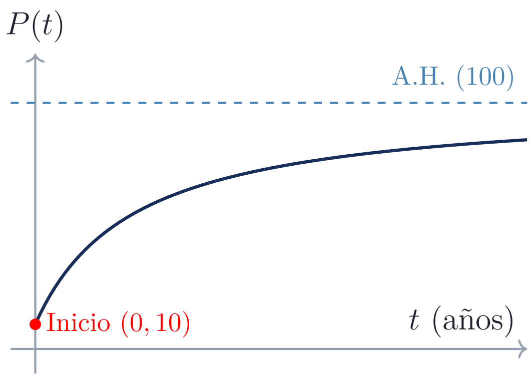
Aplicación 1: Reacción Química

Contexto: La concentración molecular oscila bajo $C(t) = \frac{4t}{t^2+1}$. Esboce la curva identificando el pico de reacción y la depuración final a lo largo del tiempo infinito.
Solución: A.H.: $y = 0$ ($t \to \infty$ purga total). Corte: $(0, 0)$.



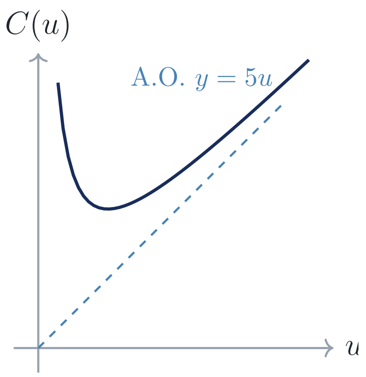
Aplicación 2: Capacidad de Carga

Contexto: La población de venados evoluciona según $P(t) = \frac{100t+20}{t+2}$. Trace el modelo biológico marcando el tope de saturación del ecosistema selvático.
Solución: A.H. en $y = 100$ (Capacidad). Intercepto inicial en $(0, 10)$.



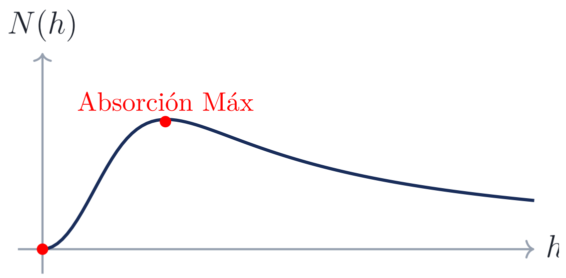
Aplicación 3: Costo Medio de Producción

Contexto: Fabricar procesadores genera un costo unitario $C(u) = \frac{5u^2+1000}{u}$. Grafique la tendencia económica destacando la directriz inclinada que domina la sobreproducción.
Solución: A.V. $u = 0$. Dividiendo obtenemos A.O. $y = 5u$. La curva asume forma de Ü".



Aplicación 4: Efecto Analgésico

Contexto: Un anestésico sanguíneo decae trazando $N(h) = \frac{20h^2}{h^3+8}$. Bosqueje el mapeo clínico visualizando el umbral de absorción y la limpieza hepática.
Solución: Corte $(0, 0)$. A.H. $y = 0$. Asciende a un máximo y luego limpia el sistema.

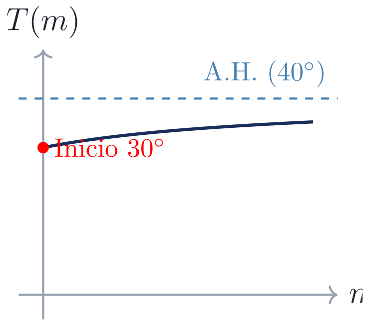


PROFE TEO

Graficar en aplicaciones es fácil porque la vida real rara vez tiene "tiempos negativos". Ignora el lado izquierdo del eje Y y enfócate en el Cuadrante I.

Aplicación 5: Ley de Enfriamiento

Contexto: Un servidor informático expulsa calor marcando $T(m) = \frac{40m+150}{m+5}$. Dibuje el diagrama térmico exponiendo la temperatura base gélida inquebrantable.
Solución: A.H. $y = 40$ (Límite). Inicio en $T(0) = 30$.



Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o gráfico.

1. ¿Por qué la gráfica de una función racional debe cambiar de signo al atravesar una asíntota vertical de multiplicidad impar (ej. $1/(x-2)$), pero no lo hace si es par?

2. Si determinamos los cortes en el eje X y las asíntotas verticales, ¿por qué es imperativo probar valores intermedios (puntos de prueba) antes de trazar la curva?

3. Una función racional corta el eje X en $x = 4$ y tiene A.V. en $x = 6$. ¿Es posible que la curva cambie de signo en el intervalo $(4, 6)$? Argumente su respuesta.

4. Geométricamente, si sabemos que $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ tiene un A.H. en $y = 2$ y el punto mínimo es $(0, 0)$, ¿cómo deduce que la curva jamás tendrá valores negativos?

5. Al esbozar $y = \frac{x^3-1}{x}$, obtenemos una asíntota vertical, pero ninguna horizontal ni oblicua lineal (es parabólica). Explique el motivo analizando los grados.

6. Si una función cruza su propia Asíntota Horizontal, ¿significa que el concepto de "límite al infinito.está equivocado? Explique qué ocurre en los extremos lejanos de la curva.

7. Argumente por qué las asíntotas oblicuas suelen dominar la forma general de la gráfica únicamente en los extremos izquierdo y derecho, alejados del origen.

8. En un contexto biomédico, si la gráfica de concentración viral se acerca asintóticamente al eje X, ¿qué confirmación clínica aporta la forma de dicha curva?

9. Si al simplificar $\frac{x^2-9}{x-3}$ obtenemos la recta $y = x + 3$ con un hueco en $(3, 6)$, ¿qué le pasaría a la curva si no hubiéramos notado el hueco y asumido una A.V.?

10. Analice el esbozo mental de $f(x) = \frac{-1}{x^2}$. Sabiendo que x^2 es positivo, ¿hacia dónde apuntarán irremediablemente las dos ramas de la asíntota vertical?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso (Esbozos)

Problema 1. Realice el análisis de signos y esboce $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Cortes: Eje X en $x =$ ____. Eje Y en $y =$ ____.

2. Asíntotas: A.V. en $x =$ ____. A.H. en $y =$ ____.

3. Signos en la recta numérica dividida por -2 y 1: Zona izquierda $(-\infty, -2)$ es ____, zona central es ____, derecha es ____.

Problema 2. Analice y grafique $g(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$.

Guía de Solución Interactiva

1. El cuadrado en el denominador indica que no hay cambio de ________ en la A.V.

2. A.V. en $x =$ ____. A.H. en $y =$ ____. Corte Y en ____.

3. Como el numerador es positivo y el denominador siempre positivo, la curva completa está en la zona ________.

Problema 3. Esboce la función con hueco $h(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Factoriza: $h(x) = \frac{(x-1)(x+\_\_\_\_)}{x-1}$.

2. Función simplificada: $y = x +$ ____.

3. Dibuja una línea recta inclinada, pero deja un círculo vacío (hueco) en la coordenada (____, ____).

PROFE TEO

Dibuja siempre las asíntotas primero con líneas punteadas suaves. ¡Son el esqueleto de tu gráfica! Luego plota los puntos de corte, y finalmente, traza la curva fluyendo a través de ellos.

Problemas Generales (Análisis y Esbozo)

Analice completamente (Cortes, Asíntotas, Signos) y esboce la gráfica.

Problema 4. $f(x) = \frac{x-4}{x+3}$

Problema 5. $g(x) = \frac{2x}{x-2}$

Problema 6. $h(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$

Problema 7. $p(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

Problema 8. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

Problema 9. $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x-1}$

Problema 10. $h(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$

Problema 11. $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$

Problema 12. $f(x) = \frac{3x}{x^2-x-6}$

Problema 13. $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

Problema 14. $g(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$

Problema 15. $h(x) = \frac{2x^2+5x-3}{x+2}$

Problema 16. $y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$

Problema 17. $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

Problema 18. $p(x) = \frac{x^2+4}{x}$

Problema 19. $y = \frac{x^4-16}{x^2-4}$

Problema 20. $g(x) = \frac{-2x}{x^2+4x+4}$

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso (Esbozos Contextuales)

Problema 1. Un ecosistema aislado modela predadores mediante $P(t) = \frac{40t}{t+5}$. Esboce la curva biológica determinando el equilibrio asintótico predatorio estabilizado perpetuamente.

Guía de Solución Interactiva

1. Capacidad de carga biológica (A.H.): $y =$ _____. 2. Inicio poblacional (corte Y): $(0,$ _____$)$. 3. Esbozo: La curva nace en el origen y crece en el cuadrante I hasta aplanarse rozando la cota de _____ predadores.

Problema 2. La termodinámica de un horno calibra $T(m) = \frac{200m^2}{m^2+2}$. Diagrama la escalada calórica infiriendo la máxima temperatura inquebrantable de la aleación.

Guía de Solución Interactiva

1. Tope calórico (A.H.): $y =$ _____. 2. Origen del encendido: (_____, _____). 3. Esbozo: Ascenso parabólico inicial que se curva asintóticamente pegándose a los _____ grados centígrados.

Problema 3. Un fármaco intramuscular depura concentración $C(h) = \frac{10h}{h^2+1}$. Grafique el metabolismo destacando el pico máximo y la purga hepática total.

Guía de Solución Interactiva

1. Purga final (A.H.): $y =$ _____. Inicio en (_____, _____). 2. Analizando $h = 1$, la dosis sube a $C(1) =$ _____. 3. Esbozo: Sube fuerte al pico en $h = 1$, luego desciende lentamente hasta vaciarse sobre el eje _____.

Problemas Generales Contextualizados (Esbozo Requerido)

Problema 4. La acústica de un sonar submarino propaga ecos mapeando $A(d) = \frac{50d}{d+10}$. Trace el frente de onda identificando el techo decibélico sonoro máximo.

Problema 5. Un vector epidemiológico disemina virus estructurando $V(t) = \frac{1000t^2}{t^2+50}$. Bosqueje la curva sanitaria evidenciando la saturación endémica poblacional ineludible.

Problema 6. La refracción de fibra óptica dispersa fotones $F(L) = \frac{L^2-4}{L-2}$. Modele el trayecto lumínico marcando el nodo oscuro (hueco) omitido espectralmente.

Problema 7. Una flotilla logística acumula fletes portuarios tarifados $C(q) = \frac{100q+50}{q}$. Grafique la merma económica destacando el costo marginal asintótico constante.

Problema 8. El núcleo astrofísico irradia plasma proyectando $E(m) = \frac{m^3}{m^2+1}$. Dibuje la directriz oblicua que gobierna la expulsión energética intergaláctica continua.

Problema 9. Las finanzas de una startup queman capital $K(x) = \frac{50x}{x^2+4}$. Plasme el rebote monetario evidenciando el colapso financiero a cero absoluto a largo plazo.

Problema 10. Un brazo robótico hidráulico tensa fluidos $P(v) = \frac{10v^2}{v^2-1}$. Ilustre la fractura del sistema esquivando el muro de presión letal volumétrico operativo.

Problema 11. La aerodinámica del vórtice canaliza sustentación $S(v) = \frac{2v^2-8}{v^2+2}$. Esboce el flujo de aire cruzando la zona de arrastre negativo bajo el ala.

Problema 12. El reactor de fusión decae radiactivamente $R(t) = \frac{500}{t+2}$. Trace la curva isoterma confirmando el enfriamiento nuclear seguro sin tocar el cero kelvin.

Problema 13. La demografía de la comuna agrícola migra $D(x) = \frac{3x^2+12x}{x^2+1}$. Modele el abandono rural revelando el tope de urbanización masiva irreversible.

Problema 14. Un motor magnético levita polarizando $M(k) = \frac{-20k}{k^2+4}$. Grafique la repulsión inversa marcando el valle de atracción estabilizada en el riel cuántico.

Problema 15. Las represas hidroeléctricas abren aliviaderos drenando $Q(h) = \frac{h^3-27}{h-3}$. Dibuje el torrente parabólico señalando la exclusión crítica (hueco) de la compuerta fisurada.

Problema 16. Una red de criptominería satura nodos algorítmicos $N(c) = \frac{1024c}{c+8}$. Bosqueje la tasa de hash aplanada evidenciando el límite de procesamiento criptográfico bloqueado.

Problema 17. La batería de grafeno degrada amperaje $B(m) = \frac{100m^2}{m^2+5m+6}$. Ilustre la pérdida de carga marcando el muro asintótico de resistencia electrolítica muerta.

Problema 18. Un cable de nanotubos soporta tensión molecular $T(s) = \frac{s^2+s-2}{s-1}$. Plotee la elasticidad del polímero omitiendo el microcorte estructural fallido de fábrica.

Problema 19. La meteorología polar registra tormentas isobáricas $P(h) = \frac{-50h}{h^2+10}$. Trace la caída de presión anticiclónica destacando la depresión climática congelada estacionaria.

Problema 20. El acelerador de partículas frena colisiones trazando $A(v) = \frac{v^4}{v^3+1}$. Esboce la diagonal asintótica que predice el escape subatómico inercial del colisionador de hadrones.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. Eje X en -2. A.V 1, A.H 1. $(-,-,+)$.
2. No X. A.V -2 (par). A.H 0. $(+,+)$.
3. Hueco en $(1,2)$. Línea $y=x+1$.
4. X en 4. A.V -3, A.H 1.
5. X en 0. A.V 2, A.H 2.
6. No X. A.V 3 (par). A.H 0. Curva abajo.
7. X en ± 3. A.V -3 se cancela (hueco en $-3,-6$). Línea $x-3$.
8. X en 0. A.V ± 2. A.H 1.
9. X en $2,-1$. A.V 1. A.O $y=x$.
10. X en 0. A.H 2. Sin A.V. Valle en 0.
11. X en ± 2. A.V ± 1. A.H 1.
12. X en 0. A.V $3,-2$. A.H 0.
13. X en 0. A.V ± 2. A.O $y=x$.
14. X en ± 1. A.V 0 (impar). A.H 0.
15. X en $1/2,-3$. A.V -2. A.O $y=2x+1$.
16. Hueco en $(1,1/4)$. A.V -3. A.H 0.
17. Hueco en $(0,-1)$. A.V 1. A.H 1.
18. No X. A.V 0. A.O $y=x$.
19. Parábola $y=x^2+4$ con huecos en ± 2.
20. X en 0. A.V -2 (par). A.H 0. Curva cruza eje X.

Propuestos de Aplicación (Características Clave para Esbozo)

1. Curva Sube a A.H. $y=40$.
2. Curva Sube a A.H. $y=200$.
3. Pico en $(1,5)$, baja asintóticamente a 0.
4. Sube a techo decibélico A.H. $y=50$.
5. Sube a saturación endémica A.H. $y=1000$.
6. Línea $L+2$ con hueco en $(2,4)$.
7. U asimétrica baja y sube a A.O. $y=100$.
8. Curva cúbica paralela a A.O. $y=m$.
9. Pico inicial, cae a colapso A.H. $y=0$.
10. Muro de presión letal en A.V. $v=1$.
11. Cruza arrastre (X en ± 2), sube a A.H 2.
12. Curva de enfriamiento decrece a 0.
13. Curva logística sube a tope A.H. $y=3$.
14. Repulsión cae a valle, sube a A.H 0.
15. Parábola h^2+3h+9, hueco compuerta $(3,27)$.
16. Tasa de hash tope A.H. $y=1024$.
17. Resistencia A.V. $m=2, m=3$. A.H. 100.
18. Línea $s+2$, microcorte hueco en $(1,3)$.
19. Valle en $(3{,}16,-7{,}9)$, sube a 0.
20. Inercia subatómica A.O. $y=v$.

¡Llegaste al Final!

'Un dibujo vale más que mil ecuaciones. Cuando logras ver la curva completa, con sus caídas al abismo y sus vuelos al infinito, dejas de calcular a ciegas y empiezas a comprender el universo.'

- El arte de graficar la realidad

¡Felicidades! Has coronado el Precálculo Gráfico. Dominas las asíntotas, los huecos y el análisis de signos. El cálculo diferencial ahora te espera con los brazos abiertos.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com