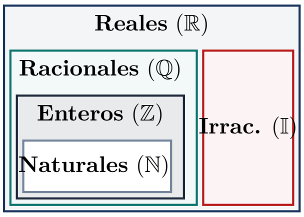
HOJA DE TRUCOS: FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

MATERIAL DE REPASO RÁPIDO CREADO POR PROF. TEÓFILO TEVES — WWW.TEOTEVES.COM

1. Conjuntos Numéricos y la Recta Real

Los números reales $\mathbb{R}$ se organizan en subconjuntos clave de manera anidada. Su comprensión evita errores estructurales al definir dominios.



Propiedades de las Operaciones

Para todos los números reales a, b, c:

- **Conmutativa:** $a + b = b + a$ • $ab = ba$
- **Asociativa:** $(a+b)+c = a+(b+c)$ • $(ab)c = a(bc)$
- **Distributiva:** $a(b + c) = ab + ac$

2. Valor Absoluto

Representa la distancia geométrica de un número respecto al origen 0 en la recta real. Por definición:

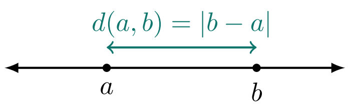
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades Fundamentales

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$
4. **Desigualdad Triangular:** $|a + b| \leq |a| + |b|$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre a y b en la recta es $d(a, b) = |b - a|$.



¡Alerta de Error Común!
$\sqrt{x^2} \neq x$ en general. Lo correcto es $\sqrt{x^2} = |x|$. Ejemplo: $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

3. Exponentes Enteros y Racionales

Leyes estrictas para simplificar expresiones algebraicas:

Ley	**Fórmula**
Producto (bases iguales)	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cociente (bases iguales)	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Potencia de un producto	$(ab)^n = a^n b^n$
Exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Exponente cero ($a \neq 0$)	$a^0 = 1$
Fracción invertida	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Exponentes Racionales (Fraccionarios)

Definidos mediante radicales donde el denominador indica el índice de la raíz:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ejemplo: $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$.

4. Radicales y Racionalización

Si n es un entero positivo, la raíz n-ésima principal se rige por:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Casos Esenciales de Racionalización

Para eliminar raíces del denominador:

1. **Monomio:** Para $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$ con $m < n$, multiplicar por $\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$.
$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$$
2. **Binomio (Uso del conjugado):** Para $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, multiplicar por $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
$$\frac{3}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 3(\sqrt{5}+2)$$

5. Polinomios y Productos Notables

Los productos notables permiten expandir expresiones de forma instantánea y fluida.

Fórmulas de Expansión Inmediata

- **Binomio al Cuadrado:**
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
- **Diferencia de Cuadrados:**
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
- **Binomio al Cubo:**
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
- **Suma y Diferencia de Cubos:**
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

6. Estrategias de Factorización

Factorizar consiste en transformar sumas en productos algebraicos. Sigue esta secuencia analítica fija:

1. Factor Común Monomio / Polinomio

Siempre extrae el Máximo Común Divisor de términos.

$$3x^3y^2 - 9x^2y^4 = 3x^2y^2(x - 3y^2)$$

2. Factorización por Agrupación

Útil para 4 o más términos. Agrupa para forzar un factor común.

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = x^2(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x^2+2)$$

3. Trinomios de la Forma $x^2 + bx + c$

Buscar dos números r y s que sumados den b y multiplicados den c. Así, $x^2 + bx + c = (x+r)(x+s)$.

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

4. Trinomio por Aspa Simple $(ax^2 + bx + c)$

Descomponer los extremos de forma cruzada para verificar el término central.

7. Expresiones Fraccionarias

Son cocientes de polinomios. Su simplificación requiere obligatoriamente factorizar numerador y denominador.

Operaciones Fundamentales

- **Multiplicación:** $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$
- **División:** $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$
- **Suma/Resta:** Requiere el Mínimo Común Denominador (MCD).

Error Crítico Prohibido
$\frac{x^2+5}{x} \neq x + 5$. ¡No se pueden simplificar sumandos individuales! Solo se cancelan factores multiplicativos completos: $\frac{x(x+5)}{x} = x + 5$.

8. Fracciones Compuestas

Son expresiones donde el numerador, el denominador o ambos contienen fracciones secundarias.

Método de Simplificación Eficiente

Paso 1: Encuentra el MCD de todas las fracciones internas.
Paso 2: Multiplica el numerador principal y el denominador principal por dicho MCD para eliminar las fracciones secundarias de un solo paso.

Ejemplo Guiado Paso a Paso

Simplifica: $E = \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

1. El MCD de los denominadores internos (x y x^2) es x^2.
2. Multiplicamos arriba y abajo por x^2:
$$E = \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$
3. Factorizamos ambas partes para simplificar:
$$E = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
4. Cancelamos el factor común $(x+1)$:
$$E = \frac{x}{x-1} \quad (\text{para } x \neq -1, 0, 1)$$