HOJA DE TRUCOS: FUNCIONES Y GRÁFICAS

MATERIAL DE REPASO RÁPIDO CREADO POR PROF. TEÓFILO TEVES — WWW.TEOTEVES.COM

1. El Sistema de Coordenadas Rectangulares

El plano cartesiano está formado por el eje x (abscisas) y el eje y (ordenadas), dividiendo el plano en 4 cuadrantes.

Fórmula de la Distancia: Entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto Medio: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

2. Gráficas de Ecuaciones

La gráfica de una ecuación es el conjunto de todos los puntos (x, y) que la satisfacen.

- **Intercepto en x:** Hacer $y = 0$ y despejar x.
- **Intercepto en y:** Hacer $x = 0$ y despejar y.

Simetrías Clásicas:

- **Eje y:** Reemplazar x por $-x$ da la misma ecuación.
- **Origen:** Reemplazar x e y por $-x$ e $-y$ resulta en la misma ecuación.

3. Definición Formal de Función

Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a **cada** elemento x en A **exactamente un** elemento y en B.

$$y = f(x) \quad (x : \text{independiente}, \; y : \text{dependiente})$$

Prueba de la Recta Vertical
Una curva en el plano es la gráfica de una función si y solo si ninguna recta vertical interseca la curva más de una vez.

4. Determinación de Dominios

El dominio es el conjunto de todos los valores válidos de x.
Restricciones Fundamentales:

1. **Denominadores:** No pueden ser cero ($D(x) \neq 0$).
2. **Raíces de índice par ($\sqrt{\quad}, \sqrt[4]{\quad}$):** El radicando debe ser no negativo ($R(x) \geq 0$).
3. **Logaritmos:** El argumento debe ser estrictamente positivo ($A(x) > 0$).

5. Tasa de Cambio Promedio y Cociente Diferencial

Mide qué tan rápido cambia $f(x)$ respecto a x en $[x_1, x_2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

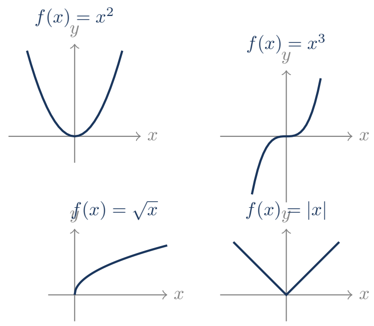
El Cociente Diferencial (Pilar del Cálculo)

Evalúa la tasa de cambio en un intervalo h:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

6. Catálogo de Funciones Básicas

Conocer estas "funciones padre" permite graficar por traslación.



7. Funciones Definidas a Trozos

Se definen mediante distintas reglas en diferentes partes del dominio. Se debe graficar cada tramo respetando sus límites.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

8. Paridad de Funciones (Pares e Impares)

- **Función Par:** $f(-x) = f(x)$. Simétrica respecto al **eje** y. Ejemplo: $\cos(x), x^2$.
- **Función Impar:** $f(-x) = -f(x)$. Simétrica respecto al **origen**. Ejemplo: $\sin(x), x^3$.

9. Transformaciones Rígidas

Cambian la posición pero no la forma de $f(x)$ ($c > 0$):

Transformación	Efecto en la Gráfica
$f(x) + c$	Sube c unidades
$f(x) - c$	Baja c unidades
$f(x - c)$	Derecha c unidades
$f(x + c)$	Izquierda c unidades
$-f(x)$	Reflejo en el eje x
$f(-x)$	Reflejo en el eje y

Cuidado con los signos
Dentro del argumento, los signos operan de manera "opuesta" a la intuición: $f(x + 2)$ mueve a la izquierda, no a la derecha.

10. Transformaciones No Rígidas

Distorsionan la forma de la gráfica ($c > 1$):

- $cf(x)$: Estiramiento vertical por un factor de c.
- $\frac{1}{c}f(x)$: Compresión vertical por factor de c.
- $f(cx)$: Compresión horizontal por factor de c.
- $f\left(\frac{x}{c}\right)$: Estiramiento horizontal por factor de c.

11. Álgebra de Funciones

Podemos sumar, restar, multiplicar y dividir:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \bullet \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dominio: Intersección de los dominios originales: $Dom(f) \cap Dom(g)$. En división, sumamos que $g(x) \neq 0$.

12. Composición de Funciones

Consiste en evaluar una función dentro de otra. Se denota como $f \circ g$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Procedimiento: Inyectar toda la expresión de $g(x)$ donde haya una x en la fórmula de $f(x)$.

13. Funciones Inversas (f^{-1})

La inversa "deshace" lo que hace f. Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$.

- **Prueba:** Tiene inversa si es **Uno a Uno** (Pasa la prueba de la Recta Horizontal).
- **Propiedad:** $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.
- **Gráfica:** La gráfica de f^{-1} es la reflexión de f sobre la recta identidad $y = x$.