PRECÁLCULO

FUNCIONES RACIONALES II

CUADERNO DE TRABAJO

Asíntotas Oblicuas e Intersecciones

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Curvas en Inclinación

Ya vimos qué sucede cuando el denominador gana o empata en grados. Pero, ¿qué pasa si el numerador es exactamente un grado mayor? La función escapa al infinito, pero lo hace siguiendo una trayectoria diagonal: una **Asíntota Oblicua** (o inclinada).

1. Asíntotas Oblicuas (A.O.)

Existe una A.O. en $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ **solo si** el grado de $N(x)$ es exactamente 1 unidad mayor que el grado de $D(x)$ (es decir, $n = m + 1$).

- Para hallarla, realiza la división de polinomios (larga o sintética).
- El cociente resultante (ignorando el residuo) forma la ecuación de la recta de la asíntota oblicua: $\boldsymbol{y = mx + b}$.

PROFE TEO

¡Regla de oro! Una función racional NUNCA puede tener una asíntota horizontal y una oblicua al mismo tiempo. Son mutuamente excluyentes.

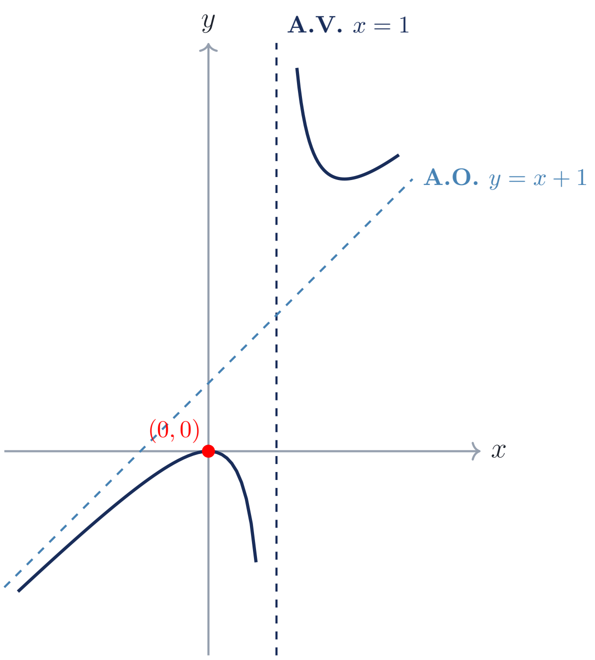
2. Intersecciones con los Ejes (Cortes)

Los puntos donde la gráfica cruza los ejes coordenados nos ayudan a anclar el dibujo.

- **Corte en el eje Y:** Ocurre cuando $x = 0$. Se halla evaluando $\boldsymbol{f(0)}$. (Puede no existir si $x = 0$ es una asíntota vertical).
- **Cortes en el eje X (Raíces):** Ocurren cuando $y = 0$. Una fracción es cero solo si su parte superior es cero. Se hallan igualando a cero el numerador simplificado: $\boldsymbol{N(x) = 0}$.

PROFE TEO

Antes de igualar el numerador a cero para buscar los cortes en X, asegúrate de haber simplificado. Si un corte en X coincide con una asíntota vertical, ese corte es falso (es un hueco).



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Cálculo de Asíntota Oblicua

Enunciado: Halle la A.O. de $f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x-2}$.
Solución: El grado superior (2) supera al inferior (1) por uno. Hay A.O.
Usamos división sintética con $c = 2$:

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 3 & -5 \\ \hline & & 2 & 10 \\ & 1 & 5 & 5 \end{array}$$

Ignoramos el residuo 5. El cociente es $x + 5$.
Respuesta: La asíntota oblicua es $y = x + 5$.

Problema Resuelto 2: Intersecciones con los Ejes

Enunciado: Determine los cortes en X e Y de $g(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$.
Solución: Simplificamos: $g(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2(x-2)}{x-1}$. (Hueco en $x = -2$).
Corte en Y $(x = 0)$: $g(0) = \frac{2(0-2)}{0-1} = \frac{-4}{-1} = 4 \implies (0, 4)$.
Corte en X $(y = 0)$: Igualamos el numerador simplificado a cero.
$2(x - 2) = 0 \implies x = 2 \implies (2, 0)$.
Nota: El corte $(-2, 0)$ se descarta porque es un hueco.

Problema Resuelto 3: División Larga Obligatoria

Enunciado: Encuentre la A.O. de $h(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{x^2+1}$.
Solución: Grados: 3 y 2. Hay A.O. El divisor es cuadrático, usamos división larga:

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x^2+1 & x^3+2x^2+0x-1 \\ & -(x^3+x) \\ & \quad 2x^2-x-1 \\ & \quad -(2x^2+2) \\ & \qquad -x-3 \end{array}$$

El cociente es $x + 2$.
Respuesta: La asíntota oblicua es $y = x + 2$.

PROFE TEO
Las asíntotas oblicuas y horizontales SÍ pueden ser cruzadas por la gráfica en el centro del plano. Solo las asíntotas verticales son muros absolutamente impenetrables.

Problema Resuelto 4: Corte con la Propia Asíntota

Enunciado: Averigüe si $f(x) = \frac{x^2-3x+5}{x-1}$ cruza su asíntota oblicua.
Solución: 1. Hallamos A.O.: $(x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$. Sintética con $c = 1$ da cociente $x - 2$ y resto 3. La A.O. es $y = x - 2$.
2. Igualamos la función a la asíntota: $\frac{x^2-3x+5}{x-1} = x - 2$.
3. Resolvemos: $x^2 - 3x + 5 = (x - 2)(x - 1) \implies x^2 - 3x + 5 = x^2 - 3x + 2$.
Se cancelan las variables: $5 = 2$ (Falso).
Respuesta: Como la ecuación no tiene solución, la curva **nunca** cruza su A.O.

Problema Resuelto 5: Reconstrucción desde Ceros

Enunciado: Construya una función racional con cortes en X en $(3, 0)$ y $(-1, 0)$, A.V. en $x = 2$ y A.O. $y = x$.
Solución: Cortes en X $\implies$ Numerador: $(x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3$.
A.V. en $x = 2 \implies$ Denominador: $(x - 2)$.
Dividimos para probar la A.O.: $(x^2 - 2x - 3) \div (x - 2)$.
Sintética con $c = 2$: $1(-2)\dots$ Cociente x. ¡Cumple perfectamente!
Respuesta: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Farmacocinética

Contexto: La toxina en sangre de un paciente decae bajo $C(t) = \frac{2t^2-t-15}{t-3}$. Calcule la tendencia de limpieza metabólica oblicua que rige el sistema orgánico a largo plazo.
Solución: Buscamos la A.O. dividiendo el polinomio polinomialmente.
Sintética con $c = 3$: coeficientes $2, -1, -15$.
Baja 2, suma 6 $\implies$ 5, suma 15 $\implies$ 0.
Respuesta: La tendencia metabólica sigue la recta inclinada $y = 2t + 5$.

Aplicación 2: Crecimiento Ecológico

Contexto: Una reserva forestal expande su biomasa mediante $B(x) = \frac{x^2+4x+10}{x+1}$. Determine el intercepto inicial cuando el tiempo de observación es cero absoluto.
Solución: El momento inicial exige evaluar el intercepto en el eje vertical Y.
Hacemos $x = 0$: $B(0) = \frac{0^2+4(0)+10}{0+1} = \frac{10}{1} = 10$.
Respuesta: La biomasa inicial de la reserva forestal era 10 unidades.

Aplicación 3: Economía Industrial

Contexto: El costo operativo ensamblando baterías es $C(q) = \frac{5q^2-20}{q+2}$. Indique el nivel de producción exacto donde el costo se anula alcanzando rentabilidad neutra extrema.
Solución: Rentabilidad neutra implica corte en el eje X ($C = 0$).
Simplificamos: $\frac{5(q-2)(q+2)}{q+2} = 5(q-2)$. (Hueco en $q = -2$).
Igualamos: $5(q-2) = 0 \implies q = 2$.
Respuesta: La producción neutra ocurre en 2 unidades.

Aplicación 4: Dinámica de Partículas

Contexto: La trayectoria de un átomo magnético dibuja $T(v) = \frac{v^3+v^2+2}{v^2+1}$. Derive la directriz asintótica oblicua que guía la colisión microscópica futura.
Solución: A.O. por división larga entre cuadrática.
$(v^3 + v^2 + 0v + 2) \div (v^2 + 1)$.
$v^3 \div v^2 = v$. Restamos $-(v^3 + v) \implies v^2 - v + 2$.
$v^2 \div v^2 = 1$. Restamos $-(v^2 + 1) \implies -v + 1$.
Respuesta: La directriz magnética obedece la trayectoria $y = v + 1$.

PROFE TEO
Las asíntotas oblicuas en problemas de costos o física suelen mostrar cómo la variable crece de manera casi lineal cuando los valores de x se vuelven inmensos, ignorando fluctuaciones iniciales.

Aplicación 5: Fatiga de Materiales

Contexto: Un pilar de acero cede bajo el polinomio de estrés $S(f) = \frac{4f^2-9f+2}{f}$. Compruebe si la fuerza neutralizadora nula intersecta las tolerancias métricas permitidas.
Solución: Intersección X requiere $S(f) = 0$. Numerador $4f^2 - 9f + 2 = 0$.
Factorizando o fórmula general: $(4f - 1)(f - 2) = 0$.
Raíces: $f = 1/4$ y $f = 2$.
Respuesta: La fuerza neutraliza el estrés exactamente en $1/4$ y 2 newtons.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Si el grado del numerador supera al del denominador por 2 (ej. grado 4 sobre grado 2), ¿existirá una asíntota oblicua lineal? Justifique su respuesta.
2. ¿Por qué es matemáticamente imposible que una función racional presente una asíntota horizontal ($y = c$) y una oblicua ($y = mx + b$) simultáneamente?
3. Al hallar cortes en el eje X, el denominador se ignora. ¿Qué justificación algebraica permite "desaparecer.[el] denominador al igualar la fracción a cero?
4. Si el corte en el eje X calculado resulta coincidir con la coordenada de la asíntota vertical, ¿qué significa gráficamente esto sobre el presunto corte?
5. Una curva cruza su asíntota oblicua. Si igualamos la función a la ecuación de la asíntota, ¿qué debe suceder algebraicamente para confirmar dicho cruce?
6. Analice el caso: $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. La A.O. es $y = x$. ¿Por qué al evaluar números cada vez más grandes, la curva se acerca a $y = x$ desde .ªrriba¿
7. ¿Es posible que una función racional carezca por completo de cortes en los ejes X e Y? Construya un ejemplo mental o justifique la imposibilidad.
8. En un contexto de ingeniería civil, si la asíntota oblicua de deformación es $y = 2x$, ¿qué le sucede a la tasa de daño físico conforme pasa el tiempo inmensamente?
9. Si al efectuar la división larga para hallar la A.O. el residuo resulta ser exactamente cero, ¿qué nos dice esto sobre la función original y sus asíntotas verticales?
10. El dominio excluye valores que hacen cero al denominador. Si el denominador es $x^2 + 9$, ¿cómo afecta esta suma de cuadrados a la presencia de asíntotas verticales?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule la asíntota oblicua de $f(x) = \frac{3x^2-x+4}{x+1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Establece la sintética. $c =$ _____. Coeficientes: 3, _____, 4.
2. Baja el 3, multiplica por c: _____. Suma: $-1 + (-3) =$ _____.
3. El cociente lineal es _____$x -$ _____. La asíntota oblicua es $y =$ __________.

Problema 2. Halle los cortes en el eje X de $g(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2+2}$.

Guía de Solución Interactiva

1. El corte en X requiere que el __________ sea igual a cero.
2. Factoriza $x^2 - 5x + 6 = 0 \implies (x -$ _____$)(x -$ _____$) = 0$.
3. Las intersecciones coordenadas en el eje horizontal son (_____, 0) y (_____, 0).

Problema 3. Determine el corte en el eje Y de $h(x) = \frac{4x^3-2x^2+7}{x^2-3x-1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. El corte en Y se obtiene evaluando $x =$ _____.
2. Reemplaza: $h(0) = \frac{0-0+\_\_\_\_\_}{0-0-\_\_\_\_\_}$.
3. La intersección ordenada ocurre en el punto (0, _______).

PROFE TEO

Para saber el corte en el eje Y, tapa con un dedo todas las letras "x"de la fracción. Lo que queda (los números sueltos divididos) es tu respuesta instantánea.

Problemas Generales

Problema 4. Extraiga la A.O. de $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x-2}$.

Problema 5. Halle los cortes en X e Y de $y = \frac{x^2-16}{x-1}$.

Problema 6. Calcule la asíntota oblicua de $g(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 3}$.

Problema 7. Determine los interceptos de $h(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}$.

Problema 8. Halle la A.O. usando división larga: $P(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - x + 1}$.

Problema 9. Encuentre todos los cortes en los ejes para $y = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 5x + 6}$.

Problema 10. Extraiga A.V., A.H., y A.O. de $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.

Problema 11. Demuestre algebraicamente que $y = \frac{x^2 + 4}{x}$ no cruza el eje X.

Problema 12. Calcule la A.O. y verifique si la curva cruza esta asíntota en $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 3}$.

Problema 13. Halle los cortes de $g(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 - x - 12}$ advirtiendo posibles huecos.

Problema 14. Determine la asíntota oblicua de $f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{x + 2}$.

Problema 15. Extraiga intersecciones de $h(x) = \frac{x^3+x^2-2x}{x^2+1}$.

Problema 16. Halle la recta asintótica inclinada de $R(x) = \frac{4x^3-2x^2+1}{2x^2-x}$.

Problema 17. Revise si $y = \frac{x^3-1}{x}$ posee cortes en el eje Y.

Problema 18. Encuentre el punto de cruce exacto entre $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{x-1}$ y su propia A.O.

Problema 19. Formule una función racional que corte X en 5 y cuya A.O. sea $y = x + 1$.

Problema 20. Halle todas las asíntotas y cortes de $y = \frac{x^4-1}{x^3+x^2}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un cohete asciende con trayectoria espacial $A(t) = \frac{t^2+5t+2}{t+1}$. Derive la asíntota oblicua que rige su dirección inercial futura inalterable.

Guía de Solución Interactiva

1. Realizamos división sintética con $c = \_\_\_\_$. 2. Coeficientes $1, 5, 2$. Bajamos $1 \implies 1(-1) = -1 \implies 5 - 1 = \_\_\_\_$. 3. La dirección inercial espacial corresponde a la recta polinomial $y = t + \_\_\_\_$.

Problema 2. El calor térmico disipado se estabiliza midiendo $T(m) = \frac{3m^2-m-4}{m-2}$. Establezca el intercepto calorífico nulo para calibrar sensores iniciales.

Guía de Solución Interactiva

1. El intercepto inicial exige que la variable temporal sea $m = \_\_\_\_$. 2. Reemplazamos: $T(0) = \frac{0-0-\_\_\_\_}{0-\_\_\_\_}$. 3. La base calorífica estabilizada arroja $y = \_\_\_\_$ grados térmicos de calibración.

Problema 3. Un tallo floral crece mutando genéticamente bajo $B(d) = \frac{d^2-9}{d^2-4d+3}$. Encuentre el momento botánico donde la altura vegetal toca la raíz horizontal cero.

Guía de Solución Interactiva

1. Factorizamos numerador y denominador para evitar cortes falsos: $\frac{(d-3)(d+\_\_\_\_)}{(d-3)(d-\_\_\_\_)}$. 2. El factor $(d-3)$ genera un hueco. Sobrevive el numerador botánico $(d + \_\_\_\_)$. 3. Igualamos a cero. El momento radicular vegetativo verídico ocurre en $d = \_\_\_\_$.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. El nivel freático de un pozo subterráneo fluctúa según $N(h) = \frac{3h^2-h+4}{h-2}$. Indique la pendiente de inclinación del vaciado acuífero continuo proyectado.

Problema 5. La balística de un peritaje mide el rastro de la esquirla $E(x) = \frac{x^2-25}{x^2+5x}$. Especifique el corte forense en la pared perimetral cero.

Problema 6. La barométrica de la cabina huracanada decrece marcando $P(v) = \frac{4v^2-v+1}{2v+1}$. Calcule la tendencia de despresurización lineal asintótica atmosférica de emergencia.

Problema 7. Una flotilla portuaria exporta chatarra perdiendo tonelaje $C(d) = \frac{d^3-8}{d^2+d+1}$. Extraiga el punto aduanero inicial contabilizado antes del zarpe logístico marítimo absoluto.

Problema 8. El matraz mezcla reactivos neutralizando ácidos $Q(s) = \frac{2s^2-s-10}{s+3}$. Identifique los segundos moleculares exactos donde la corrosión química impacta la cota neutral.

Problema 9. Un telescopio refracta espectros difusos focalizando $L(m) = \frac{m^3-4m}{m^2+2}$. Precise los micrómetros ópticos que logran alineación visual perfecta cruzando el plano focal central.

Problema 10. La demografía de la provincia satélite proyecta su densidad $P(a) = \frac{a^2+10a+5}{a-1}$. Determine el modelo de expansión migratoria lineal que gobernará la próxima década.

Problema 11. Un panel de aislamiento insonoriza graves rebotando ondas $S(f) = \frac{f^2-16}{f^2-f-12}$. Averigüe las frecuencias acústicas sordas donde la vibración armónica golpea el silencio absoluto.

Problema 12. El encriptador bloquea tramas saturando servidores $C(k) = \frac{5k^2+3k-1}{k+1}$. Deduzca la trayectoria de carga de ancho de banda generada asintóticamente por el ataque cibernético.

Problema 13. La articulación mecánica desgasta servos consumiendo $W(t) = \frac{t^3-t^2+2}{t^2-1}$. Defina la directriz oblicua de fatiga metálica que quebrará las aleaciones del brazo ensamblador.

Problema 14. Un planeador ajusta sus alerones midiendo sustentación $A(v) = \frac{v^2-9v+14}{v-5}$. Aísle la velocidad supersónica precisa que anula la fuerza aerodinámica de ascenso gravitacional.

Problema 15. Las placas tectónicas separan continentes desplazando $D(m) = \frac{m^2+m-6}{m+2}$. Halle la brecha milimétrica inicial existente antes del micro sismo geológico registrado topográficamente.

Problema 16. Una represa purga sedimentos turbios filtrando $F(v) = \frac{3v^3-2v^2+v}{v^2+4}$. Resuelva las compuertas volumétricas donde el lodo decantado toca interceptos hidrológicos cero limpios.

Problema 17. El módem enlaza fibra rebotando espectros $R(z) = \frac{4z^2-z+5}{2z-1}$. Extraiga el canal de latencia lineal que arrastrará el pulso electromagnético periférico satelital.

Problema 18. La soldadura de tungsteno enfría costuras irradiando $T(c) = \frac{c^2-25}{c^2+6c+5}$. Verifique si la escoria metalúrgica quiebra tolerancias en el plano intercepto horizontal estipulado.

Problema 19. Una plaga viral infecta plantaciones multiplicando toxinas $I(h) = \frac{h^3-1}{h^2+h}$. Pronostique la tangente de proliferación epidémica descontrolada que arrasará las hectáreas del valle.

Problema 20. El mercado fiduciario estabiliza bonos marcando $E(y) = \frac{2y^2-8y+6}{y-3}$. Compruebe el punto muerto bancario garantizando los plazos financieros de inversión de capital inicial.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $y = x + 7$
2. Corte X: $(\pm 4, 0)$, Corte Y: $(0, 16)$
3. $y = 2x - 1$
4. Cortes X: $(0, 0), (-4, 0)$, Corte Y: $(0, 0)$
5. $y = x + 1$
6. Corte X: $(2, 0)$ (raíz real). Y: $(0, -4/3)$
7. Hueco en $x = -1$, A.V. no, A.O. $y = x + 1$
8. Num $\neq 0$ para $x \in \mathbb{R}$. No cruza X.
9. A.O. $y = x - 4$. Intersección con A.O.: $x = 5$.
10. Hueco en 3. Corte X: $(-3, 0)$. Y: $(0, 9/4)$
11. $y = -x + 6$
12. Cortes X: $(0, 0), (1, 0), (-2, 0)$. Y: $(0, 0)$
13. A.O. $y = 2x$
14. No hay corte Y (A.V. en $x = 0$).
15. Sí, interseca en $x = -1$.
16. Ej: $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{x+1}$
17. A.V. $x = 0, -1$. A.H. no. A.O. $y = x - 1$.
18. -
19. -
20. -

Propuestos de Aplicación

1. $y = t + 4$
2. $y = 2$ grados térmicos.
3. $d = -3$
4. $y = 3h + 5$
5. Corte en pared $x = 5$ ($x = -5$ es hueco).
6. Tendencia $y = 2v - 1{,}5$
7. Inicio logístico -8 toneladas.
8. Segundos neutros $s = 5/2$ y $s = -2$.
9. Micrómetros $m = 0, m = 2, m = -2$.
10. Modelo lineal $y = a + 11$.
11. Frecuencia $f = 4$ ($f = -4$ es hueco).
12. Trayectoria $y = 5k - 2$.
13. Directriz de fatiga $y = t - 1$.
14. Velocidades supersónicas $v = 7$ y $v = 2$.
15. Brecha inicial de -3 mm.
16. Compuerta limipia $v = 0$.
17. Latencia $y = 2z + 0{,}5$.
18. Corte metalúrgico $c = 5$ ($c = -5$ hueco).
19. Proliferación $y = h - 1$.
20. Punto muerto en $y = 1$ ($y = 3$ hueco).

¡Llegaste al Final!

'No todas las trayectorias se rinden ante un muro horizontal o colapsan en el vacío vertical. Algunas escapan hacia el infinito construyendo su propia diagonal imparable.'

- Trazando nuevos rumbos

¡Felicidades! Has conquistado el último nivel de las funciones racionales. Intersectar ejes y calcular inclinaciones infinitas ya no es un misterio para ti.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com