PRECÁLCULO

FUNCIONES RACIONALES I

CUADERNO DE TRABAJO

Definición, Dominio y Asíntotas

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Fracturando el Plano

Las funciones racionales son fracciones donde el numerador y el denominador son polinomios: $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$. Al tener una variable en el denominador, el dominio se fractura, creando "muros invisibles"llamados asíntotas.

1. Dominio y Asíntotas Verticales (A.V.)

El **dominio** está formado por todos los números reales excepto los que hacen cero al denominador: Dom $f = \mathbb{R} - \{x \mid D(x) = 0\}$.
Para hallar las **Asíntotas Verticales**:

1. Factoriza completamente $N(x)$ y $D(x)$.
2. Simplifica los factores comunes (estos generan "huecos").
3. Iguala a cero los factores *sobrevivientes* del denominador. Las rectas $x = a$ resultantes son tus A.V.

PROFE TEO

¡Cuidado letal! Antes de decir que $D(x) = 0$ es una asíntota vertical, TIENES que simplificar la fracción. Si un factor se cancela arriba y abajo, no es una asíntota, ¡es un hueco!

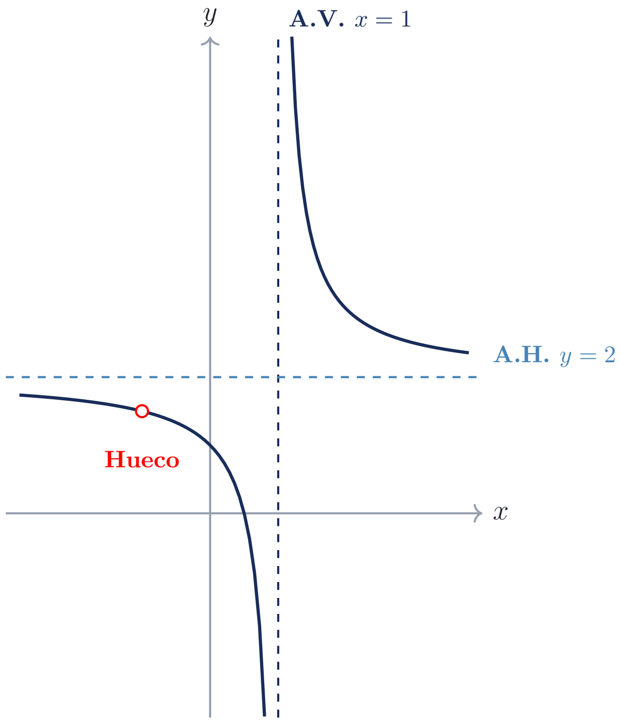
2. Asíntotas Horizontales (A.H.)

Analizan el comportamiento en los extremos ($\pm\infty$). Se calculan comparando el grado (exponente mayor) del numerador (n) y del denominador (m):

- **Si $n < m$ (Denominador más fuerte):** La asíntota es el eje X, es decir, $\boldsymbol{y = 0}$.
- **Si $n = m$ (Empate de fuerzas):** La asíntota es la división de sus coeficientes principales: $\boldsymbol{y = \frac{a_n}{b_m}}$.
- **Si $n > m$ (Numerador más fuerte): No hay** asíntota horizontal (la curva escapa al infinito o tiene asíntota oblicua).

PROFE TEO

La asíntota horizontal te dice qué pasa en el futuro lejano ($x \to \infty$). ¡Al infinito solo le importan los exponentes más grandes, ignora el resto!



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Empate de Grados

Enunciado: Determine el dominio, A.V. y A.H. de $f(x) = \frac{6x-5}{2x+4}$.
Solución: 1. **Dominio y A.V.:** Denominador a cero: $2x + 4 = 0 \implies 2x = -4 \implies x = -2$.
Como no hay factores comunes con el numerador, $x = -2$ es la única **A.V.**
Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$.
2. **A.H.:** Grado superior $n = 1$, grado inferior $m = 1$. Empatan. Dividimos los coeficientes principales: $y = \frac{6}{2} = 3$.
A.H.: $y = 3$.

PROFE TEO

Si el grado de abajo es más grande (ej. x arriba, x^2 abajo), el denominador crece tan rápido que aplasta a la fracción hacia el cero. Por eso la A.H. es $y = 0$.

Problema Resuelto 2: El Peligro del Hueco

Enunciado: Halle las asíntotas de $g(x) = \frac{x^2-9}{x^2-x-6}$.
Esquema de Solución: ¡Cuidado, hay que factorizar primero!

$$g(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}$$
$$\downarrow$$
$$g_{simp}(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

El factor cancelado $(x-3)$ genera un **hueco** en $x = 3$.
El factor sobreviviente $(x+2)$ genera la **A.V.** en $x = -2$.
A.H.: Mismos grados (x/x), dividimos coeficientes: $y = 1$.

Problema Resuelto 3: Denominador Dominante

Enunciado: Extraiga las asíntotas de $h(x) = \frac{4x}{x^2+x-20}$.
Solución: A.V.: Denominador: $x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4) = 0$.
No se cancelan con $4x$. Asíntotas Verticales en $x = -5$ y $x = 4$.
A.H.: Grado superior $n = 1$, inferior $m = 2$. Como el denominador es más fuerte $(n < m)$, la asíntota aplasta la función.
A.H.: $y = 0$ (el eje X).

Problema Resuelto 4: Numerador Dominante

Enunciado: Determine la A.H. y A.V. de $p(x) = \frac{3x^3-1}{x^2+5}$.
Solución: A.V.: Igualamos el denominador a cero: $x^2 + 5 = 0 \implies x^2 = -5$.
No existen raíces reales. **Conclusión:** No tiene asíntotas verticales.
A.H.: Grado superior $n = 3$, inferior $m = 2$. Como $n > m$, la fracción se dispara al infinito.
Conclusión: No tiene asíntota horizontal.

Problema Resuelto 5: Suma de Racionales

Enunciado: Halle las asíntotas de $f(x) = 2 + \frac{5}{x-1}$.
Solución: Unificamos la fracción: $f(x) = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = \frac{2x-2+5}{x-1} = \frac{2x+3}{x-1}$.
A.V.: Factor del denominador $x - 1 = 0 \implies x = 1$.
A.H.: Empate de grados $(n = m = 1)$. Coeficientes: $y = \frac{2}{1} = 2$.
Atajo: En la forma original $c + \frac{k}{x-a}$, la A.H. siempre es el término constante $y = c$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Concentración Salina

Contexto: Un tanque mezcla químicos. La concentración salina en miligramos tras t minutos responde a $C(t) = \frac{50t}{t+2}$. Halle la concentración límite cuando el tiempo transcurre hacia el infinito.
Solución: El límite al infinito requiere calcular la Asíntota Horizontal de la función.
Los grados empatan (t y t). Dividiendo coeficientes: $y = \frac{50}{1} = 50$.
Respuesta: La concentración límite estabilizará exactamente en 50 miligramos.

Aplicación 2: Costo Promedio Industrial

Contexto: Ensamblar dispositivos demanda un costo total $C(x) = 12000 + 40x$. Deduzca la A.H. del costo promedio unitario $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ e interprete su valor económico de producción en masa.
Solución: Función promedio: $\overline{C}(x) = \frac{12000+40x}{x}$.
Empate de grados (1 y 1). A.H.: $y = \frac{40}{1} = 40$.
Respuesta: El costo mínimo insuperable por unidad fabricada tenderá a $40.

Aplicación 3: Ecología de Poblaciones

Contexto: Una colonia bacteriana confinada crece modelada por $P(t) = \frac{8000t^2}{2t^2+5}$. Calcule la capacidad de carga máxima absoluta del ecosistema bajo estas condiciones de aislamiento.
Solución: La capacidad de carga es la Asíntota Horizontal.
Grados empatados (t^2). Coeficientes principales: $y = \frac{8000}{2} = 4000$.
Respuesta: El ecosistema soportará un tope máximo absoluto de 4000 bacterias.

Aplicación 4: Farmacocinética Sanguínea

Contexto: El nivel analgésico inyectado decae mediante $N(h) = \frac{15h}{h^2+1}$. Prediga matemáticamente el comportamiento del medicamento en el torrente sanguíneo a largo plazo.
Solución: Calculamos la A.H. Grado superior (h^1) es menor al inferior (h^2). El denominador es dominante, forzando la fracción hacia abajo.
Respuesta: Nivel límite es $y = 0$; el medicamento se purgará totalmente del sistema.

PROFE TEO
Las asíntotas verticales representan eventos físicos críticos: cortocircuitos (resistencia cero), colapso gravitatorio, o divisiones entre cero que destruyen el sistema.

Aplicación 5: Refrigeración Térmica

Contexto: La temperatura central de un reactor desciende siguiendo $T(m) = 25 + \frac{300}{m+5}$, siendo m minutos. Identifique la temperatura base inquebrantable de enfriamiento del sistema.
Solución: La estructura $c + \frac{k}{x}$ revela directamente la asíntota horizontal en la constante separada.
Límite: $y = 25$.
Respuesta: El reactor nunca se enfriará por debajo de los 25 grados.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Una curva jamás podrá cruzar su propia Asíntota Vertical. Argumente matemáticamente por qué esto es una ley absoluta basada en la división por cero.
2. ¿Puede una función racional atravesar su propia Asíntota Horizontal en algún punto central del gráfico? Justifique recordando qué analiza realmente la A.H.
3. Un compañero afirma que $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ tiene una A.V. en $x = 4$. ¿Cuál es el error fatal en su proceso analítico?
4. Geométricamente, ¿qué diferencia visual existe entre graficar un "hueco"(discontinuidad removible) y una .ªsíntota verticalïnfinita?
5. Si el numerador de una fracción polinómica tiene grado 7 y el denominador grado 3, ¿qué ocurrirá gráficamente al llevar x hacia números inmensos?
6. ¿Es posible que una función racional tenga dos Asíntotas Horizontales diferentes, como ocurre a veces con funciones exponenciales inversas?
7. Diseñe mentalmente una función racional sencilla cuya A.H. sea $y = 5$ y su única A.V. sea $x = -2$. Escriba su modelo algebraico.
8. Si el discriminante del denominador cuadrático resulta ser negativo ($\Delta < 0$), ¿qué nos asegura esto respecto a los cortes en el dominio?
9. Analice: Si sumamos dos funciones racionales distintas, ¿las asíntotas de la función resultante siempre serán la suma de las asíntotas originales?
10. En un contexto financiero, si la asíntota horizontal del costo unitario es \$15, ¿por qué es matemáticamente imposible producir a \$14 la unidad, sin importar el volumen?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle dominio, A.V. y A.H. de $f(x) = \frac{7x+2}{x-3}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Denominador a cero: $x - 3 = 0 \implies x = \_\_\_\_\_$.
Dominio: $\mathbb{R} - \{\_\_\_\_\_\}$. A.V. en $x = \_\_\_\_\_$.

2. Para la A.H., compara grados. Arriba $n = \_\_\_\_\_$, abajo $m = \_\_\_\_\_$.

3. Hay empate. Divide coeficientes: $y = \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_} \implies y = \_\_\_\_\_$.

Problema 2. Identifique huecos y A.V. de $g(x) = \frac{x-5}{x^2-25}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Factoriza el denominador (diferencia de cuadrados): $(x - \_\_\_\_\_)(x + \_\_\_\_\_)$.

2. Cancela factores comunes. El factor cancelado es $(x - \_\_\_\_\_)$, generando un hueco en $x = \_\_\_\_\_$.

3. El factor que sobrevive abajo es $(x + \_\_\_\_\_)$, creando A.V. en $x = \_\_\_\_\_$.

Problema 3. Determine la A.H. de $h(x) = \frac{5-3x^2}{4x^2+7x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica el término principal arriba: _____. Grado $n = \_\_\_\_\_$.

2. Identifica el término principal abajo: _____. Grado $m = \_\_\_\_\_$.

3. Grados empatados. División de coeficientes clave: $y = \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_}$.

····▷ **PROFE TEO**
Para hallar A.H. en polinomios desordenados, busca el término con la x de mayor potencia, sin importar si está al inicio o al final.

Problemas Generales

Problema 4. Extraiga A.H. y A.V. de $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$.

Problema 5. Determine las asíntotas de $g(x) = \frac{8x}{x^2-9}$.

Problema 6. Halle huecos y A.V. en $h(x) = \frac{x^2-x-12}{x-4}$.

Problema 7. Calcule la A.H. de $p(x) = \frac{4x^3-2x+1}{5x^3+7}$.

Problema 8. Halle todas las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

Problema 9. Encuentre A.V. y A.H. de $y = \frac{3-x}{x+5}$.

Problema 10. Determine A.H. de $y = \frac{100x}{x^4+1}$.

Problema 11. Halle el dominio exacto de $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$.

Problema 12. Identifique las asíntotas de $f(x) = -3 + \frac{1}{x+2}$.

Problema 13. Simplifique y extraiga huecos de $y = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$.

Problema 14. Halle A.V. y A.H. de $R(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-16}$.

Problema 15. Determine asíntotas de $g(x) = \frac{5x^2}{2x^2+3x-2}$.

Problema 16. Construya una función racional con A.V. en $x = 1$ y A.H. en $y = -2$.

Problema 17. Halle las asíntotas de $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$.

Problema 18. Extraiga las asíntotas de $P(x) = \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+3)}$.

Problema 19. Evalúe si la curva de $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$ cruza su propia A.H.

Problema 20. Halle el dominio y todas las asíntotas de $y = \frac{x^2-3x+2}{x^3-x}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La intensidad luminosa proyectada por una lente es $L(d) = \frac{50d^2}{d^2+10}$. Calcule la barrera de enfoque infinito.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluando la A.H., grado $n =$ _____ y $m =$ _____. 2. Extraemos coeficientes principales: $y = \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_}$. 3. La intensidad lumínica máxima inalcanzable es _____ unidades.

Problema 2. El voltaje de un condensador se debilita bajo $V(t) = \frac{120}{t+1}$. Prediga el potencial eléctrico almacenado en el ocaso temporal absoluto.

Guía de Solución Interactiva

1. Compara grados. Arriba el grado es _____ y abajo es _____. 2. Como el denominador (es mayor / es menor): __________. 3. La A.H. fuerza el límite a $y =$ _____. El voltaje se extingue.

Problema 3. Una compuerta de desagüe frena el agua filtrando $Q(x) = \frac{10x^2-40}{x^2-4}$. Encuentre el hueco crítico de mantenimiento de presión.

Guía de Solución Interactiva

1. Factorizar ambos: $Q(x) = \frac{10(x-\_\_\_\_)(x+\_\_\_\_)}{(x-\_\_\_\_)(x+\_\_\_\_)}$. 2. El factor cancelado dual elimina A.V. y deja un valor escalar $y =$ _____. 3. La falla crítica omitida se ubicaba en la coordenada de flujo nulo absoluto.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una sirena ensordece el túnel irradiando ondas acústicas $A(x) = \frac{300x}{x+50}$. Desvele el umbral decibélico máximo que percibirán conductores lejanos.

Problema 5. El catalizador sintético estabiliza reacciones moleculares $K(t) = \frac{5t^2+2t}{t^2+1}$. Estime la velocidad cinética final remanente prolongada químicamente.

Problema 6. La atracción gravitatoria interplanetaria decrece usando $G(d) = \frac{9{,}8d}{d^3+d}$. Indique el límite de fuerza de escape espacial experimentado visualmente.

Problema 7. El inventario paletizado abarrota la bodega marcando eficiencia $E(x) = \frac{90x^2}{3x^2+15x}$. Deduzca el porcentaje saturado máximo logístico operativo permanente.

Problema 8. Una enredadera invasora satura muros bajo el modelo biológico $H(m) = \frac{40m^3}{2m^3+m^2}$. Determine el tope altitudinal botánico franqueado vegetalmente.

Problema 9. El router modula ondas wifi transmitiendo $S(r) = \frac{250r}{r^2+5}$. Cuantifique la potencia residual de señal detectada en radios kilométricos perimetrales.

Problema 10. El margen de utilidad bruta accionario es $U(x) = \frac{4x^2-x}{x^2+10}$. Declare el tope lucrativo bursátil porcentual congelado globalmente.

Problema 11. La infección viral epidémica contagia pacientes sumando $I(t) = \frac{15000t^2}{3t^2+100}$. Formule el tope sanitario de camillas saturadas requeridas estatalmente.

Problema 12. El brazo robótico engrasa sus engranajes reduciendo fricción

$F(v) = \frac{40v+10}{5v-2}$. Indique el coeficiente residual de roce calibrado térmicamente.

Problema 13. La bomba de presión presuriza caudales hidráulicos $P(h) = \frac{120h^2}{4h^2+8}$. Defina la capacidad límite de bares hidráulicos entubados tolerables estructuralmente.

Problema 14. El lingote de titanio fundido decae térmicamente reportando $T(m) = 15 + \frac{800}{m+2}$. Compruebe el nivel gélido mínimo inalcanzable metalúrgicamente solidificado.

Problema 15. Las corrientes salinas descienden abismos filtrando $S(d) = \frac{35d^3}{d^3+200}$. Averigüe la densidad salobre abisal estable depositada pelágicamente en profundidades abismales.

Problema 16. El flujo migratorio puebla capitales bajo demografía $M(t) = \frac{8t^2+5t}{2t^2+t}$. Establezca la tasa estabilizada poblacional metropolitana concentrada urbanamente.

Problema 17. El disipador de calor absorbe entropía termodinámica $E(k) = \frac{100k}{k^2+20}$. Aclare el índice de desorden calorífico final expulsado atmosféricamente.

Problema 18. La fricción aerodinámica castiga el fuselaje modelando arrastre $D(v) = \frac{0{,}5v^3}{0{,}1v^3+v}$. Aísle la resistencia de viento impenetrable enfrentada supersónicamente en vuelo.

Problema 19. La píldora sedante depura semividas biológicas trazando $N(h) = \frac{50}{h^2+4h}$. Constate la dosis miligramo estancada crónicamente en el paciente dosificado.

Problema 20. La red neuronal minera procesa datos algorítmicos $D(c) = \frac{1024c^4}{8c^4+16c^2}$. Demuestre el límite absoluto de bytes por ciclo ejecutados cuánticamente.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. A.V. $x = 3$, A.H. $y = 7$.
2. A.V. $x = \pm 3$, A.H. $y = 0$.
3. Hueco en $x = 4$, sin A.V.
4. A.H. $y = 4/5$.
5. A.V. $x = 2$, Sin A.H.
6. A.V. $x = -5$, A.H. $y = -1$.
7. A.H. $y = 0$.
8. Dom $= \mathbb{R}$, sin A.V., A.H. $y = 0$.
9. A.V. $x = -2$, A.H. $y = -3$.
10. Hueco en $x = -1$, A.V. $x = -1$ (doble).
11. Hueco $x = 0$, A.V. $x = -4$, A.H. $y = 1$.
12. A.V. $x = -2, 1/2$, A.H. $y = 5/2$.
13. Ej: $y = \frac{-2x}{x-1}$.
14. A.V. $x = -2$, Sin A.H. (hueco en 2).
15. Hueco $x = 1$, A.V. $x = -3$, A.H. $y = 2$.
16. No (al igualar, no hay sol. real).
17. Hueco $x = 1$, A.V. $x = 0, -1$, A.H. $y = 0$.
18. -
19. -
20. -

Propuestos de Aplicación

1. 50 unidades de enfoque.
2. 0 voltaje (se extingue).
3. Valor $y = 10$ (huecos en ± 2).
4. 300 decibelios.
5. 5 unidades cinéticas.
6. Fuerza de escape $y = 0$.
7. 30 % de saturación (90/3).
8. Altitud tope 20 metros (40/2).
9. Señal nula ($y = 0$).
10. 4 puntos lucrativos.
11. 5000 camillas (15000/3).
12. Coeficiente 8 (40/5).
13. Capacidad límite 30 bares (120/4).
14. Temperatura mínima 15°C.
15. Densidad estable 35.
16. Tasa metropolitana 4 (8/2).
17. Índice nulo $y = 0$.
18. Resistencia 5 unidades (0,5/0,1).
19. 0 miligramos remanentes.
20. 128 bytes/ciclo (1024/8).

$y = 0$

¡Llegaste al Final!

'La vida a veces presenta muros que parecen infranqueables y límites que nos aplastan. La matemática nos enseña que si simplificas tus factores, a veces ese muro era solo un pequeño hueco en el camino.'

- Cruzando el Infinito

¡Felicidades! Has dominado las fracturas del plano cartesiano. Ahora controlas el comportamiento oculto del infinito y las barreras invisibles del precálculo.

∞

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com