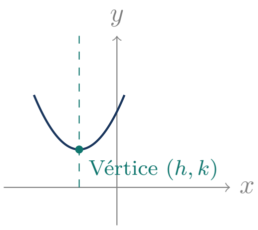
HOJA DE TRUCOS: POLINOMIALES Y RACIONALES

MATERIAL DE REPASO RÁPIDO CREADO POR PROF. TEÓFILO TEVES — WWW.TEOTEVES.COM

1. Funciones Cuadráticas

Son polinomios de grado 2. Su gráfica es una **parábola**.

- **Forma Estándar:** $f(x) = a(x-h)^2 + k$. El vértice es el punto (h, k). Si $a > 0$ abre hacia arriba (mínimo en k), si $a < 0$ abre hacia abajo (máximo en k).
- **Forma General:** $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para hallar el vértice, usa la coordenada $x = -\frac{b}{2a}$, y luego evalúa $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.



2. Funciones Polinomiales de Grado Superior

Forma: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Son curvas continuas y suaves (sin picos ni saltos).

Comportamiento en los Extremos

Lo dicta el término principal $a_n x^n$:

- n **impar,** $a_n > 0$**:** Cae a la izquierda, sube a la derecha.
- n **impar,** $a_n < 0$**:** Sube a la izquierda, cae a la derecha.
- n **par,** $a_n > 0$**:** Sube a ambos lados.
- n **par,** $a_n < 0$**:** Cae a ambos lados.

Multiplicidad de los Ceros

Si el factor $(x - c)$ aparece m veces (multiplicidad m):

- Si m es **impar**: la gráfica **cruza** el eje x en c.
- Si m es **par**: la gráfica **rebota** (toca y se devuelve) en c.

3. División de Polinomios

Al dividir $f(x)$ entre $d(x)$, obtenemos un cociente $q(x)$ y un residuo $r(x)$:

$$f(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

División Sintética: Es un atajo para divisiones largas, pero **solo funciona** cuando el divisor es lineal de la forma $(x - c)$.

4. Teoremas del Residuo y del Factor

Herramientas vitales para factorizar polinomios sin dividir.

Teorema del Residuo: Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, el residuo es exactamente $f(c)$.
Teorema del Factor: $x - c$ es un factor de $f(x)$ si y solo si $f(c) = 0$. (Es decir, el residuo es cero).

5. Ceros Racionales

Teorema de los Ceros Racionales: Si un polinomio tiene ceros racionales (fracciones), deben tener la forma $\frac{p}{q}$, donde:

- p es un factor del **término constante** (a_0).
- q es un factor del **coeficiente principal** (a_n).

6. Ceros Complejos y Teorema Fundamental

Teorema Fundamental del Álgebra (TFA): Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros en el sistema de números complejos (contando multiplicidades).

Teorema de los Ceros Conjugados

Si un polinomio tiene coeficientes reales y el número complejo $a + bi$ es un cero, entonces su conjugado $a - bi$ **también es un cero obligatoriamente**.

7. Funciones Racionales I

Son cocientes de dos polinomios: $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$.

- **Dominio:** Todos los números reales excepto donde el denominador sea cero ($D(x) \neq 0$).
- **Ceros (x-interceptos):** Los valores que hacen cero el numerador (y no el denominador).
- **Huecos:** Si $N(x)$ y $D(x)$ comparten un factor común $(x - c)$ que se cancela, hay un "hueco" en la gráfica en $x = c$.

8. Funciones Racionales II (Asíntotas)

Sean $N(x)$ de grado n y $D(x)$ de grado m. Después de simplificar factores comunes:

Asíntotas Verticales (A.V.)

Ocurren en las raíces del denominador: $x = c$.

Asíntotas Horizontales (A.H.)

Analiza los grados n (numerador) y m (denominador):

1. Si $n < m$: La A.H. es el eje x, es decir, $y = 0$.
2. Si $n = m$: La A.H. es $y = \frac{a_n}{b_m}$ (cociente de los coeficientes principales).
3. Si $n > m$: **No hay** asíntota horizontal.

Asíntotas Oblicuas / Inclinadas

Ocurren únicamente si el grado del numerador es **exactamente uno más** que el del denominador ($n = m + 1$). Se encuentra haciendo la división larga; el cociente (sin el residuo) es la ecuación de la recta $y = mx + b$.

9. Gráfica de Funciones Racionales

Pasos infalibles: 1. Factoriza numerador y denominador. Simplifica si es posible. 2. Encuentra los interceptos (x e y). 3. Dibuja las Asíntotas Verticales (A.V.) y Horizontales (A.H.). 4. Usa los ceros y las A.V. para dividir el eje x en intervalos. Haz una tabla de signos para saber si la gráfica va por arriba (+) o por debajo (−) del eje x.