PRECÁLCULO

FUNCIONES POLINOMIALES

CUADERNO DE TRABAJO

Extremos y Multiplicidad de Ceros

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Descifrando la Curva

A diferencia de las rectas o parábolas, los polinomios de grado superior ($n \geq 3$) dibujan montañas rusas en el plano cartesiano. Para graficarlos sin tabular decenas de puntos, necesitamos dos secretos: cómo se comportan en los extremos infinitos y cómo interactúan con el eje X.

1. Prueba del Coeficiente Principal (End Behavior)

El comportamiento de $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ cuando $x \to \pm\infty$ depende exclusivamente del grado n y del signo del coeficiente principal a_n:

- **Grado IMPAR:** Los extremos apuntan en direcciones opuestas.
  - Si $a_n > 0$: Cae a la izquierda ($\downarrow$), sube a la derecha ($\uparrow$).
  - Si $a_n < 0$: Sube a la izquierda ($\uparrow$), cae a la derecha ($\downarrow$).
- **Grado PAR:** Los extremos apuntan en la misma dirección.
  - Si $a_n > 0$: Sube a la izquierda ($\uparrow$), sube a la derecha ($\uparrow$).
  - Si $a_n < 0$: Cae a la izquierda ($\downarrow$), cae a la derecha ($\downarrow$).

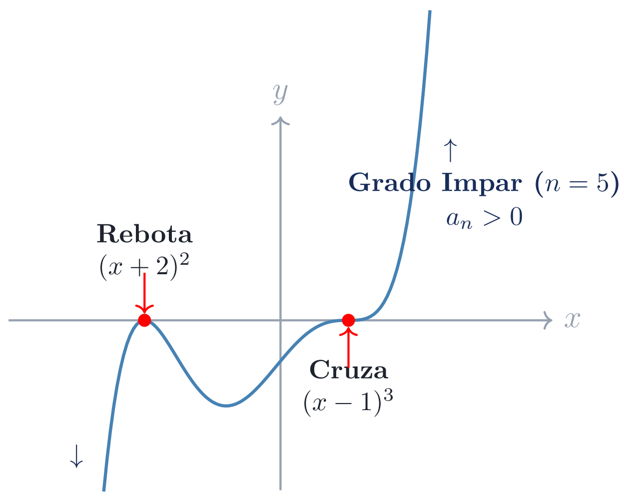
PROFE TEO

¡El término principal manda! Cuando x se hace gigante (un millón, por ejemplo), los términos menores (x^2, x) no son nada frente a un x^5. Por eso solo miramos al jefe.

2. Multiplicidad de Ceros

Si $P(x)$ tiene un factor de la forma $(x - c)^m$, decimos que c es un **cero de multiplicidad** m. El valor de m dicta cómo la curva toca el eje X en el punto $(c, 0)$:

- **Multiplicidad IMPAR ($m = 1, 3, 5 \ldots$):** La gráfica **cruza** el eje X en c. (Si $m > 1$, cruza aplanándose un poco).
- **Multiplicidad PAR ($m = 2, 4, 6 \ldots$):** La gráfica **toca y rebota** en el eje X sin cruzar al otro lado.



PROFE TEO

Imagina que el eje X es el suelo. Si la multiplicidad es par, la función es una pelota que choca y rebota. Si es impar, es una bala que atraviesa el piso.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Comportamiento Extremo

Enunciado: Determine el comportamiento en los extremos de $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x + 1$.
Solución: Observamos el término principal: $-3x^4$.
El grado es $n = 4$ (**par**), lo que significa que ambos extremos apuntan en la misma dirección.
El coeficiente es $a_n = -3$ (**negativo**), lo que significa que abren hacia abajo.
Respuesta: Cae a la izquierda ($x \to -\infty, f(x) \to -\infty$) y cae a la derecha ($x \to \infty, f(x) \to -\infty$).

Problema Resuelto 2: Hallar Ceros y Multiplicidad

Enunciado: Encuentre los ceros y su multiplicidad para $g(x) = x^3(x-4)^2(x+7)$. Determine si cruza o rebota.
Solución: $x^3 = 0 \implies x = 0$. Multiplicidad 3 (Impar). **Cruza**.
$(x-4)^2 = 0 \implies x = 4$. Multiplicidad 2 (Par). **Rebota**.
$(x+7)^1 = 0 \implies x = -7$. Multiplicidad 1 (Impar). **Cruza**.

Problema Resuelto 3: Factorización Obligatoria

Enunciado: Halle los ceros reales y su comportamiento para $h(x) = x^4 - 9x^2$.
Solución: Igualamos a cero y extraemos factor común x^2:
$x^2(x^2 - 9) = 0$.
Factorizamos la diferencia de cuadrados: $x^2(x-3)(x+3) = 0$.
Ceros:
$x = 0$ (Mult. 2, Par $\implies$ **Rebota**).
$x = 3$ (Mult. 1, Impar $\implies$ **Cruza**).
$x = -3$ (Mult. 1, Impar $\implies$ **Cruza**).

PROFE TEO

Si el polinomio no está factorizado, ¡toca usar álgebra! Factor común, agrupación o división sintética son tus mejores amigos aquí.

Problema Resuelto 4: Análisis Inverso (De Gráfica a Ecuación)

Enunciado: Un polinomio cae a la izquierda y sube a la derecha. Rebota en $x = -2$ y cruza linealmente en $x = 3$. Escriba una posible ecuación de grado mínimo.
Solución: Cae izquierda y sube derecha $\implies$ Grado **impar**, $a_n > 0$.
Rebota en $-2 \implies$ Factor $(x+2)^2$.
Cruza en $3 \implies$ Factor $(x-3)^1$.
Ecuación base: $P(x) = a(x+2)^2(x-3)$.
Grado total: $2 + 1 = 3$ (Impar, correcto). Asumimos $a = 1$.
Respuesta: $P(x) = (x+2)^2(x-3)$.

Problema Resuelto 5: Grado Efectivo Expandido

Enunciado: Determine el término principal de $P(x) = -2x(x^2 - 1)^3(x + 4)^2$ sin expandir todo.
Solución: Solo multiplicamos los términos de mayor grado de cada factor.
De $-2x$, el principal es $-2x^1$.
De $(x^2)^3$, el principal es x^6.
De $(x)^2$, el principal es x^2.
Multiplicamos: $(-2x) \cdot (x^6) \cdot (x^2) = -2x^9$.
Respuesta: El término principal es $-2x^9$. La función sube a la izquierda y cae a la derecha.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Montaña Rusa

Contexto: El perfil topográfico de una atracción mecánica se diseña mediante la función $A(x) = -0{,}01x(x-20)^2(x-50)$, donde x mide la distancia horizontal en metros. Determine los puntos exactos a nivel del suelo y explique dónde la pista roza el terreno sin hundirse.
Solución: Ceros: $x = 0, 20, 50$.
En $x = 20$ el factor está al cuadrado (multiplicidad par).
Respuesta: Roza el suelo sin hundirse a los 20 metros exactos.

Aplicación 2: Inmersión Oceánica

Contexto: Un dron submarino describe una ruta de escaneo $D(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, siendo t minutos. Averigüe en qué instantes la sonda rompe la superficie del mar ($D = 0$) y si logra rebotar sobre las olas.
Solución: Factorizamos: $t(t^2 - 12t + 36) = t(t-6)^2 = 0$.
Los ceros son $t = 0$ y $t = 6$.
Respuesta: Emerge en el minuto 6 y rebota sobre la superficie al tener multiplicidad par.

Aplicación 3: Óptica de Lentes

Contexto: El haz de un escáner corta un prisma siguiendo $L(p) = -(p-2)^3(p+4)$. ¿Hacia dónde apuntan los extremos lumínicos cuando la distancia p tiende a valores infinitos laterales?
Solución: Multiplicamos los exponentes mayores: $(-1)(p^3)(p^1) = -p^4$.
El grado es 4 (par) y coeficiente negativo.
Respuesta: Ambos extremos del láser apuntan hacia el infinito negativo (hacia abajo).

Aplicación 4: Economía Bursátil

Contexto: El valor de una acción tecnológica se modeló durante un día negro como $V(h) = h^4 - 8h^3 + 16h^2$. Evalúe a qué horas el valor toca fondo en cero y justifique el comportamiento de la curva accionaria allí.
Solución: Factorizamos: $h^2(h^2 - 8h + 16) = h^2(h-4)^2 = 0$.
Ceros: $h = 0$ y $h = 4$, ambos pares.
Respuesta: Toca fondo en las horas 0 y 4, rebotando sin llegar a valores negativos.

PROFE TEO
Las raíces múltiples nos dicen que el evento ocurre, se detiene un instante y luego retrocede. ¡Es el comportamiento típico de un impacto controlado!

Aplicación 5: Oscilación Estructural

Contexto: La deflexión de una viga puente sometida a viento extremo sigue $F(x) = (x-1)(x-5)^3$. Especifique si en la marca de 5 metros la viga se quiebra atravesando su eje de reposo o solo lo roza.
Solución: En $x = 5$, el factor tiene exponente 3 (impar).
Todo exponente impar implica que la curva cruza el eje.
Respuesta: La viga atraviesa (cruza) su eje de reposo en la marca de los 5 metros.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico.

1. Si un polinomio tiene grado 6, ¿por qué es totalmente imposible que sus extremos apunten en direcciones opuestas? Base su respuesta en el límite matemático infinito.
2. Explique por qué el término x^{100} domina por completo al término $1000x^{99}$ cuando evaluamos números extremadamente grandes como un billón.
3. Un compañero afirma que $P(x) = (x-2)^2(x+3)^2$ puede tener valores negativos en su gráfica. Refute esta afirmación usando el análisis de factores.
4. ¿Qué diferencia geométrica visual existe en el eje X entre un cero de multiplicidad 1 y un cero de multiplicidad 3, dado que ambos cruzan?
5. Si sabemos que un polinomio de grado 3 sube a la izquierda y cae a la derecha, ¿cuál debe ser obligatoriamente el signo de su término principal?
6. Argumente por qué un polinomio de grado impar siempre debe cruzar el eje X al menos una vez en su dominio real.
7. Dado $f(x) = (x-a)^m$. ¿Por qué cuando m es par, la curva no atraviesa el eje X? Justifique usando la regla de los signos para exponentes pares.
8. Si conocemos únicamente los ceros de una función $(x = 1, x = 4, x = 7)$, ¿es suficiente para trazar la gráfica exacta? ¿Qué información vital está faltando?
9. Relacione el Teorema Fundamental del Álgebra con la cantidad máxima de intersecciones con el eje X que puede tener $P(x) = 5x^4 - 2x$.
10. En modelado físico, ¿qué significa en el mundo real que una curva de altura rebote en el eje $X = 0$ en lugar de cruzarlo? Dé un ejemplo.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle el grado, coeficiente principal y comportamiento extremo de $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x$.

Guía de Solución Interactiva

1. El término principal (el de mayor potencia) es __________.
2. El grado es _____ (impar/par) y el coeficiente principal $a_n =$ _____ es (positivo/negativo).
3. La gráfica __________ a la izquierda y __________ a la derecha.

Problema 2. Determine los ceros y multiplicidad de $P(x) = -2(x-5)^3(x+1)^4$.

Guía de Solución Interactiva

1. Primer factor $(x-5)^3 = 0 \implies x =$ _____, Mult. _____, gráfica __________.
2. Segundo factor $(x+1)^4 = 0 \implies x =$ _____, Mult. _____, gráfica __________.
3. En $x = -1$, la curva (cruza/rebota): __________.

Problema 3. Halle los ceros factorizando $h(x) = x^4 - 16x^2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Extraemos factor común x^2: $x^2($__________$) = 0$.
2. Factorizamos diferencia de cuadrados: $x^2(x -$ _____$)(x +$ _____$) = 0$.
3. Raíces finales y comportamiento: $x = 0$ (_____), $x = 4$ (_____), $x = -4$ (_____).

PROFE TEO

Si tienes algo como $x^2 - 4$ dentro de un paréntesis, no te engañes, ¡el factor aún no está roto! Debes separar todo a raíces lineales $(x-2)(x+2)$ para ver la multiplicidad real.

Problemas Generales

Problema 4. Describa el comportamiento extremo de $f(x) = -x^6 + 3x^5 - 1$.

Problema 5. Halle ceros y multiplicidad de $g(x) = (x-2)^2(x+8)^1$.

Problema 6. Describa el comportamiento extremo de $p(x) = 5x^7 - 20x^2$.

Problema 7. Halle ceros y su comportamiento para $m(x) = x(x-1)^4(x+3)^5$.

Problema 8. Factorice y halle los ceros de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Problema 9. Encuentre el término principal de $V(x) = -3x^2(x-5)^3(2x+1)^2$.

Problema 10. Factorice y encuentre las raíces de $y = x^5 - 25x^3$.

Problema 11. Determine el grado efectivo total de $P(x) = (x^2+1)^2(x-3)^4$.

Problema 12. Escriba la ecuación mínima de un polinomio que rebota en 0 y 4, y $a_n = -1$.

Problema 13. Halle el comportamiento de los extremos de $h(x) = -x(x-2)^3(x+5)^2$.

Problema 14. Encuentre las intersecciones con los ejes de $y = -(x+1)^3(x-2)^2$.

Problema 15. Escriba un polinomio de grado 3 que cruce en $-2, 1, 5$ y su intercepto Y sea 20.

Problema 16. Analice si $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$ cruza o rebota en el origen.

Problema 17. Un polinomio de grado 5 tiene raíces en $x = 1$ (rebota) y $x = -3$ (cruza aplanado). Dé su fórmula asumiendo $a = 1$.

Problema 18. Extraiga el comportamiento de ceros para $R(x) = x^3(x^2-4x+4)$.

Problema 19. Construya un polinomio con término principal $2x^4$ que rebote en $x = 3$ y $x = -1$.

Problema 20. Halle los ceros exactos factorizando por agrupación: $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. El misil militar sigue la trayectoria cúbica $T(x) = -x(x-3)^2$. Inspeccione el cruce balístico sobre el nivel oceánico referencial en cero.

Guía de Solución Interactiva

1. Igualamos a cero: $-x(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)^2 = 0$. 2. Raíces detectadas: $x = 0$ (Mult. _____) y $x =$ _____ (Mult. _____). 3. El misil __________ en cero y __________ en tres.

Problema 2. Una población vírica evoluciona por $V(t) = t^2(t-8)^3$. Determine las horas muertas de incubación iniciales verificando su multiplicidad biológica.

Guía de Solución Interactiva

1. Extraemos raíces: $t =$ _____ (par) y $t =$ _____ (impar). 2. La multiplicidad par en cero significa que la curva __________ el eje T. 3. La eclosión crítica cruza en la hora $t =$ _____.

Problema 3. El submarino evade radares nadando bajo $P(m) = (m-2)^2(m-6)^2$. Dictamine si la nave llega a exponer la cubierta al aire en algún momento.

Guía de Solución Interactiva

1. Grado polinomial es 4, abriendo hacia __________. 2. Las coordenadas intercepto son $m =$ _____ y $m =$ _____, ambas _____ (par/impar). 3. Al rebotar en ambos puntos, la nave __________ (sí/no) sale al aire.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una turbina eólica oscila energéticamente marcando $E(h) = -h^3(h-4)^2$. Especifique si hacia el infinito de las horas operativas la producción se eleva o colapsa térmicamente.

Problema 5. La onda ultrasónica médica atraviesa el tejido bajo $S(p) = p(p-2)(p+3)^2$. Averigüe en cuántos puntos milimétricos distintos la vibración perfora la barrera celular directamente.

Problema 6. Un péndulo magnético dibuja fricciones $F(t) = (t-1)^3(t-5)^2$. Identifique el segundo temporal exacto donde el roce solo acaricia la placa de inducción basal nula.

Problema 7. El reactivo químico neutraliza ácidos generando picos $Q(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$. Revele la modalidad de intersección al alcanzar equilibrio en cero voltios.

Problema 8. La ruta de un asteroide es captada por sensores gravitatorios $R(d) = -d^4(d-5)$. Detalle el comportamiento orbital extremo al alejarse inmensamente del plano radial del sistema.

Problema 9. El caudal de inundación ribereña decrece por $V(x) = (x+2)^2(x-4)^2$. Compruebe si la crecida acuática atraviesa límites negativos provocando sequía extrema técnica.

Problema 10. Un pulso de fibra óptica modula luz $L(s) = -2s^5(s-1)^2$. Resuelva si el rebote lumínico ocurre al final del microsegundo inicial.

Problema 11. La anomalía electromagnética terrestre perturba brujulas según $M(t) = t^3 - t^2 - 6t$. Especifique los grados latitudinales precisos donde la aguja cruza el norte falso.

Problema 12. El marcapasos cardíaco ajusta diástoles modelando $C(s) = (s-1)^4(s-2)$. Confirme si el nodo auricular rebota el voltaje al primer milisegundo transcurrido.

Problema 13. La placa sismográfica traza fallas $F(r) = -r^6 + 3r^5$. Determine el comportamiento final del sismo al extender el tiempo de medición infinito posterior.

Problema 14. Un chip irradia calor disipado $H(c) = c^5 - 9c^3$. Indique las tres zonas térmicas en grados donde el enfriador congela el circuito tocando temperatura base.

Problema 15. Las abejas colonizan panales expandiendo crías por $N(d) = -(d-4)^2(d-7)^2$. Declare si la demografía del enjambre quiebra umbrales bajo cero colapsando la especie.

Problema 16. El satélite metereológico decae en órbita según trayectoria polinómica $O(x) = 5x^2(x-3)^3$. Detalle el ángulo de reentrada atmosférico en el tercer cuadrante kilométrico.

Problema 17. Un cristal corrector ocular desvía la miopía $O(m) = -m(m-1)^4(m+2)$. Analice la dirección de los vértices fotónicos al infinito perimetral de la córnea operada.

Problema 18. La tubería drena crudo viscoso midiendo espesores $F(v) = v^4 - 25v^2$. Ubique los puntos de estancamiento donde la velocidad del hidrocarburo se anula cruzando estadios.

Problema 19. Un tirante de goma absorbe impacto dinámico conformando $E(f) = (f+3)^3(f-3)^3$. Justifique el cruce elástico dual generado en las grapas de sujeción milimétricas.

Problema 20. El radar topográfico rastrea la cueva calcárea delineando $T(p) = -p^4(p-6)^2$. Exprese si la sonda ultrasónica logra penetrar la capa freática cruzando el estrato rocoso.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. Grado 3, $a_n = 4$, Cae Izq, Sube Der.
2. $x = 5$ (Mult 3, Cruza), $x = -1$ (Mult 4, Rebota).
3. $x = 0$ (Rebota), $x = 4$ (Cruza), $x = -4$ (Cruza).
4. Par negativo: Cae Izq, Cae Der.
5. $x = 2$ (Mult 2, Rebota), $x = -8$ (Mult 1, Cruza).
6. Impar positivo: Cae Izq, Sube Der.
7. $x = 0$ (Cruza), $x = 1$ (Rebota), $x = -3$ (Cruza).
8. $x(x-2)^2 = 0 \implies 0$ (Cruza), 2 (Rebota).
9. $-12x^7$
10. $x^3(x-5)(x+5) \implies 0, 5, -5$ (todos cruzan).
11. Grado efectivo: $2(2) + 4 = 8$.
12. $P(x) = -x^2(x-4)^2$
13. Grado 6, $a_n = -1 \implies$ Cae Izq, Cae Der.
14. X: $(-1, 0), (2, 0)$. Y: $(0, -4)$.
15. $P(x) = 2(x+2)(x-1)(x-5)$.
16. $x^2(x^2-x-6) \implies x = 0$ (Rebota).
17. $P(x) = (x-1)^2(x+3)^3$.
18. $x^3(x-2)^2 \implies 0$ (Cruza), 2 (Rebota).
19. $P(x) = 2(x-3)^2(x+1)^2$.
20. $x^2(x-2)-9(x-2) \implies (x-2)(x-3)(x+3)$.

Propuestos de Aplicación

1. Cruza en 0, Rebota en 3.
2. $t = 0$ (Rebota), eclosiona en $t = 8$.
3. No sale, rebota en 2 y 6.
4. Colapsa (Grado 5 negativo $\to -\infty$).
5. En dos puntos: 0 y 2 (Cruza).
6. En el segundo $t = 5$ (Rebota).
7. Rebota en 0 y en 4 ($x^2(x-4)^2$).
8. Grado 5 negativo: Sube Izq, Cae Der.
9. No atraviesa, rebota en ambos sin ser negativo.
10. Sí, rebota en $s = 1$ (Par).
11. Cruzan en $t = 0, 3, -2$.
12. Sí, rebota en $s = 1$ (Par).
13. Cae infinitamente (Grado 6 negativo).
14. Zonas: $c = 0, 3, -3$ (Todos cruzan).
15. No quiebra, la gráfica es siempre ≤ 0 (Rebota).
16. Cruza en $x = 3$ (Multiplicidad impar 3).
17. Ambos caen al infinito negativo (Grado 6 neg).
18. Puntos: $v = 0$ (Rebota), $v = \pm 5$ (Cruza).
19. Cruzan en $f = -3$ y $f = 3$ (Ambos impares).
20. No penetra, rebota en $p = 0$ y $p = 6$ (Pares).

¡Llegaste al Final!

'A veces en la vida toca cruzar al otro lado para avanzar, y otras veces es más sabio rebotar y cambiar de dirección. El secreto está en saber tu multiplicidad.'

- La danza de los polinomios

¡Felicidades! Has dominado los extremos del universo polinomial. Ya no dependes de calculadoras ciegas, ahora puedes ver el comportamiento invisible del álgebra pura.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com