PRECÁLCULO

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

CUADERNO DE TRABAJO

Inversas, Gráficas y Logaritmo Natural

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Desarmando el Exponente

El logaritmo no es un invento para complicar la vida; es la herramienta perfecta para "despejarïncógnitas que están atrapadas en el exponente. Toda función logarítmica es la **inversa exacta** de una función exponencial.

PROFE TEO
Piensa en el logaritmo como una pregunta: ¿A qué exponente debo elevar la base 'a' para que me dé como resultado 'x'?

1. Definición Formal y Dominio

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$. La función logarítmica base a se define como:

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

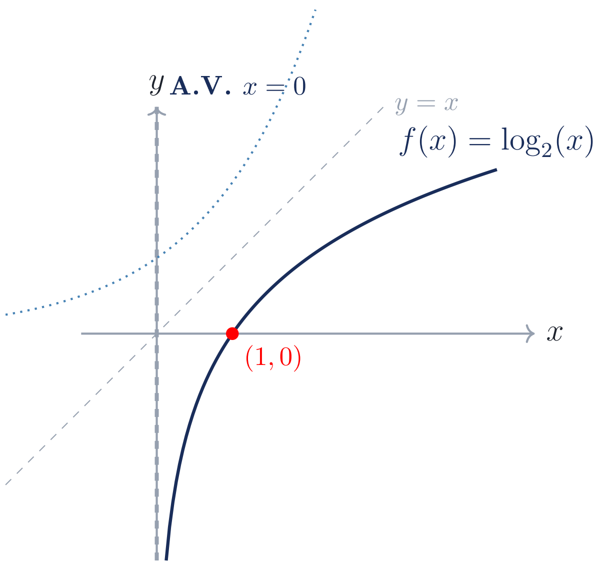
- **Argumento (x):** Tiene que ser estrictamente positivo. No existen logaritmos de ceros ni de números negativos en los reales.
- **Dominio:** $\text{Dom} f = (0, \infty)$
- **Rango:** $\text{Ran} f = (-\infty, \infty)$ (puede arrojar cualquier valor real).

PROFE TEO
¡Peligro! El argumento del logaritmo es su punto débil. Para hallar el dominio, toma lo que está dentro del paréntesis y ponle » 0". ¡Resuelve esa inecuación!

2. Comportamiento Gráfico y Asíntota Vertical

Como es la inversa de la exponencial (que tiene Asíntota Horizontal), la logarítmica hereda una **Asíntota Vertical (A.V.)**.

- La gráfica base $f(x) = \log_a(x)$ siempre tiene A.V. en el eje Y ($x = 0$).
- **Intersección:** Siempre cruza el eje X en el punto $(1, 0)$ porque $\log_a(1) = 0$.
- Si $a > 1$, la curva crece suavemente hacia la derecha.
- Si $0 < a < 1$, la curva decrece.



3. El Logaritmo Natural $(\ln x)$

El logaritmo natural es un logaritmo cuya base es el número de Euler (e). Por convención universal, no escribimos $\log_e(x)$, sino $\ln(x)$.

$$f(x) = \ln(x) \iff e^{f(x)} = x$$

Comparte absolutamente todas las propiedades, dominio y restricciones que cualquier otro logaritmo base $a > 1$.

PROFE TEO

El $\ln(x)$ es el jefe de la ciencia. Si ves ln, simplemente recuerda que la base escondida es la letra $e \approx 2{,}718$.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Hallando el Dominio

Enunciado: Determine el dominio de la función $f(x) = \ln(x^2 - 9)$.
Solución: 1. El argumento de cualquier logaritmo debe ser mayor a cero: $x^2 - 9 > 0$.
2. Factorizamos la diferencia de cuadrados: $(x-3)(x+3) > 0$.
3. Ubicamos los puntos críticos -3 y 3 en la recta numérica. Probamos zonas.
Respuesta: $\mathrm{Dom} f = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

PROFE TEO

Para hallar la Asíntota Vertical (A.V.), simplemente toma el argumento del logaritmo, igualalo a cero y despeja x. ¡Así de simple!

Problema Resuelto 2: Asíntotas y Desplazamientos

Enunciado: Identifique la Asíntota Vertical de $g(x) = 4\log_3(5 - 2x) + 7$.
Solución: El multiplicador 4 y la suma 7 solo estiran o elevan la curva, no alteran su frontera lateral. La A.V. nace cuando el argumento colapsa a cero.

$$5 - 2x = 0 \implies 2x = 5 \implies x = \frac{5}{2}$$

Respuesta: La A.V. es la recta vertical $x = 2{,}5$.

Problema Resuelto 3: Evaluando Inversas Conceptuales

Enunciado: Evalúe el valor numérico exacto de $E = \log_5(\log_2(32))$.
Solución: Resolvemos de adentro hacia afuera, como si fuera una muñeca rusa.
1. Parte interna: $\log_2(32)$. Nos preguntamos: ¿2 elevado a qué número da 32? Como $2^5 = 32$, entonces $\log_2(32) = 5$.
2. Reemplazamos en la externa: $E = \log_5(5)$.
3. Propiedad básica: ¿5 elevado a qué da 5? Es 1.
Respuesta: $E = 1$.

Problema Resuelto 4: Ecuación con Base Natural

Enunciado: Despeje el valor de x en la ecuación $3e^{4x-1} = 21$.
Solución: 1. Aislamos la base exponencial: $e^{4x-1} = \frac{21}{3} \implies e^{4x-1} = 7$.
2. Para "bajar.^{el} exponente, aplicamos la inversa (ln) a ambos lados:

$$\ln(e^{4x-1}) = \ln(7)$$

3. El logaritmo natural anula la base e: $4x - 1 = \ln(7)$.
4. Despejamos: $x = \frac{\ln(7)+1}{4}$.

Problema Resuelto 5: Extracción de la Función Inversa

Enunciado: Halle la función inversa $f^{-1}(x)$ para $f(x) = \log_2(x+3) - 5$.
Solución: 1. Cambiamos $f(x)$ por y: $y = \log_2(x+3) - 5$.
2. Intercambiamos variables x e y: $x = \log_2(y+3) - 5$.
3. Despejamos la nueva variable y:

$$x + 5 = \log_2(y+3)$$

Pasamos a su forma exponencial (la base 2 empuja el otro lado al exponente):

$$2^{x+5} = y + 3 \implies y = 2^{x+5} - 3$$

Respuesta: $f^{-1}(x) = 2^{x+5} - 3$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Sismología Extrema

Contexto: La magnitud Richter se rige por $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Un terremoto registra magnitud 7. ¿Cuántas veces es más intenso este sismo (I) frente a la referencia base (I_0)?
Solución: Sustituimos $M = 7$. Cuando no se ve base, asumimos base 10.

$$7 = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Convertimos a exponencial: $10^7 = \frac{I}{I_0}$.
Respuesta: Es $10,000,000$ (diez millones) de veces más intenso.

Aplicación 2: Ingeniería Acústica

Contexto: El umbral auditivo en decibelios sigue la regla $D = 10\log\left(\frac{P}{P_0}\right)$. Determine el impacto sonoro D de un motor que emite un poder P equivalente a $1000P_0$.
Solución: Sustituimos $P = 1000P_0$ en la fórmula:

$$D = 10\log\left(\frac{1000P_0}{P_0}\right) = 10\log(1000)$$

Como $10^3 = 1000$, $\log(1000) = 3$.

$$D = 10(3) = 30$$

Respuesta: El impacto acústico es de 30 decibelios.

Aplicación 3: Acidez Química

Contexto: El nivel de pH de fluidos gástricos responde a $pH = -\log[H^+]$, siendo $[H^+]$ la concentración de iones hidrógeno. Halle dicha concentración si el pH resulta ser exactamente 2.
Solución: Reemplazamos $pH = 2$:

$$2 = -\log[H^+] \implies -2 = \log_{10}[H^+]$$

Convertimos a notación exponencial:

$$10^{-2} = [H^+] \implies [H^+] = 0{,}01$$

Respuesta: La concentración de iones es 0,01 moles por litro.

Aplicación 4: Multiplicación Financiera

Contexto: Un portafolio inversionista crecerá según $A(t) = P(1{,}05)^t$. Despeje algebraicamente el tiempo exacto t necesario para que el capital de entrada P consiga triplicarse totalmente.
Solución: Queremos que el monto final sea $A(t) = 3P$.

$$3P = P(1{,}05)^t \implies 3 = (1{,}05)^t$$

Aplicamos logaritmo natural (ln) a ambos lados:

$$\ln(3) = \ln(1{,}05^t) \implies \ln(3) = t \cdot \ln(1{,}05)$$

Respuesta: El tiempo es $t = \frac{\ln(3)}{\ln(1{,}05)}$ años.

PROFE TEO

Las calculadoras científicas usualmente solo traen log (base 10) y ln (base e). ¡El ln es tu mejor aliado para despejar el tiempo!

Aplicación 5: Barometría Aérea

Contexto: La altitud detectada se define usando $h = -8000 \ln\left(\frac{P}{101}\right)$ metros, bajo presión P. Verifique la elevación de un globo cuando la lectura barométrica indique 101 kilopascales.
Solución: Sustituimos $P = 101$.

$$h = -8000 \ln\left(\frac{101}{101}\right) = -8000 \ln(1)$$

Propiedad fundamental: $\ln(1) = 0$.

$$h = -8000(0) = 0$$

Respuesta: La elevación es 0 metros (nivel del mar).

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué intentar calcular en una máquina $\log(-5)$ arroja un error matemático inmediato en el campo de los números reales?

2. Argumente matemáticamente por qué la base de un logaritmo jamás puede ser igual a 1 basándose en la equivalencia $1^y = x$.

3. ¿Qué relación gráfica directa existe entre las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \log_3(x)$ si las trazamos sobre un mismo plano cartesiano?

4. Un compañero indica que la curva de $y = \ln(x)$ corta al eje Y en algún punto muy profundo. ¿Por qué es falso?

5. ¿Por qué la propiedad básica $\log_a(1) = 0$ se cumple incondicionalmente, sin importar el valor positivo de la base a?

6. Geométricamente, ¿qué le ocurre a la Asíntota Vertical si modificamos la función base a $h(x) = \ln(x + 6)$?

7. ¿Es posible que el resultado de un logaritmo sea un número negativo (es decir, el rango caiga bajo cero)? Dé un ejemplo.

8. ¿Por qué usar ln (base e) en lugar de log (base 10) es vital al intentar despejar ecuaciones provenientes de decaimiento continuo?

9. Analice: Si la función exponencial crece de manera inmensamente rápida, ¿cómo describiría el ritmo de crecimiento de la función logarítmica a medida que x tiende al infinito?

10. Compruebe lógicamente la veracidad de la identidad $e^{\ln(15)} = 15$. ¿Por qué colapsan ambas operaciones?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Evalúe mentalmente la expresión $M = \log_5(125)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Transforma a su forma exponencial mental: la base es ____, y debe llegar a 125.
2. La pregunta sería: ¿5 elevado a la potencia ____ nos da 125?
3. Como $5^3 = 125$, el resultado directo del logaritmo es ____.

Problema 2. Determine el dominio estricto de $f(x) = \ln(x - 8)$.

Guía de Solución Interactiva

1. El argumento interior debe ser forzosamente: $x - 8 >$ ____.
2. Despejando la inecuación lineal obtenemos: $x >$ ____.
3. Expresado en notación de intervalos, el dominio es (____, ∞).

Problema 3. Halle la ecuación de la Asíntota Vertical de $g(x) = \log_7(3x+12)-2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Aísla exclusivamente el argumento de la función: ________.
2. Iguálalo a cero para buscar el quiebre de la curva: $3x + 12 =$ ____.
3. Resolviendo, la recta vertical de la asíntota resulta ser $x =$ ____.

PROFE TEO

Para la Asíntota Vertical (A.V.) no pongas símbolo de mayor o menor (>). Simplemente iguala el argumento exactamente a cero (=).

Problemas Generales

Problema 4. Calcule el valor de $E = \log_4(64) + \log_{10}(1000)$.

Problema 5. Determine el dominio de la función $h(x) = \log(10 - 2x)$.

Problema 6. Halle el punto exacto de intersección con el eje X de $y = \ln(x+1)$.

Problema 7. Resuelva la ecuación logarítmica $\log_3(2x - 5) = 2$.

Problema 8. Ubique la Asíntota Vertical de $p(x) = 5\ln(4x - 1) + 8$.

Problema 9. Encuentre la función inversa $f^{-1}(x)$ para $f(x) = 10^x - 3$.

Problema 10. Calcule el valor de $\log_8(2)$.

Problema 11. Determine el dominio de $y = \ln(x^2 - 16)$.

Problema 12. Resuelva despejando x: $e^{\ln(3x)} = 15$.

Problema 13. Halle el rango de la función $f(x) = \log_5(x) + 9$.

Problema 14. Encuentre la inversa de $g(x) = \ln(x - 2) + 4$.

Problema 15. Resuelva la ecuación $\log(x) + \log(x+3) = 1$. (Pista: use propiedades).

Problema 16. Evalúe $\ln(e^5) - \log_2(1/8)$.

Problema 17. Extraiga la Asíntota Vertical de $f(x) = \log_{0,5}(-x+7)$.

Problema 18. Resuelva la inecuación logarítmica $\ln(x-1) > 0$.

Problema 19. Determine el dominio de $f(x) = \frac{5}{\ln x}$.

Problema 20. Halle el valor de x para que $\log_x(81) = 4$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Cierto temblor regional marcó $M = \log(A)$ en la escala geofísica, con amplitud $A = 100000$ micras. Averigüe la magnitud numérica oficial del registro.

Guía de Solución Interactiva

1. Al no existir base visible, sabemos matemáticamente que la base oculta es _____. 2. Inserte el valor: $M = \log_{10}($__________$)$. 3. Contando posiciones o potencias, obtenemos magnitud $M =$ _____.

Problema 2. Un test de laboratorio indica concentración ácida de $[H^+] = 10^{-4}$ Molar. Calcule el pH del compuesto sabiendo que $pH = -\log[H^+]$.

Guía de Solución Interactiva

1. Sustituya el dato: $pH = -\log($________$)$. 2. El exponente de la base 10 pasará a anularse con la propiedad fundamental, arrojando $-$_____. 3. Al multiplicar por el signo negativo externo, el pH final será _____.

Problema 3. El sonido de un martillo genera decibelios medidos por $D = 10\log(10^9)$. Cuantifique la potencia acústica irradiada.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos la porción logarítmica: $\log_{10}(10^9)$ resulta directamente en el exponente _____. 2. Se sustituye en la estructura exterior: $D = 10 \times$ _____. 3. La agresión acústica confirmada escala hasta _____ decibelios totales.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una barra metalúrgica enfriándose traza su descenso térmico usando el tiempo $t = -5\ln\left(\frac{T-20}{80}\right)$. Despeje el lapso requerido exacto para alcanzar sesenta grados.

Problema 5. El isótopo forense degrada su estructura rigiéndose por años $a = \frac{\ln(M/M_0)}{-0{,}02}$. Calcule el tiempo caducado si la masa actual es la mitad del origen original.

Problema 6. La colonia bacteriana en probeta se divide multiplicándose en tiempo $h = 3\log_2\left(\frac{P}{50}\right)$. Indique cuántas horas demorarán en conseguir una población de cuatrocientas bacterias absolutas.

Problema 7. Los fotones oceánicos se filtran en profundidad $p = -15\ln\left(\frac{L}{100}\right)$ metros. Compruebe la capa batimétrica si solo penetra un porcentaje equivalente al número e lux residuales.

Problema 8. Una campaña publicitaria retiene ventas estimadas por la fórmula empírica $V(x) = 2000{+}500\ln(x)$, donde x representa dólares invertidos. Halle ventas invirtiendo solo un dólar nominal.

Problema 9. El practicante corporativo mecanografía rápido usando velocidad $V(d) = 30 + 10\ln(d)$ palabras por minuto tras d semanas. Calcule rendimiento en la semana número uno.

Problema 10. Cierto concepto estudiantil retiene información neurológica bajo $R(t) = 85 - 15\ln(t + 1)$ porcentaje. Descifre la retención intacta en el momento exacto del examen (tiempo cero transcurrido).

Problema 11. Un telescopio orbital clasifica luminosidad cósmica mediante magnitud estelar $m = 2{,}5\log(I)$. Determine la clasificación astronómica detectando flujo equivalente a diez mil unidades fotométricas captadas.

Problema 12. El servidor encriptado procesa algoritmos generando entropía informativa $E(n) = \log_2(n)$ bits. Exprese cuántos bits caóticos surgirán ingresando sesenta y cuatro paquetes informáticos ordenados binariamente.

Problema 13. La maquinaria pesada manufacturera deprecia tasación contable en meses $m = -10\ln\left(\frac{V}{40000}\right)$. Prediga los meses consumidos al cotizarse en el rango de veinte mil dólares exactos.

Problema 14. Un domo submarino resiste tensión estructural agrietándose al límite $L(p) = 4\log_5(p)$ megapascales. Valore su aguante extremo afrontando ciento veinticinco pascales de presión hidrostática presurizada externa.

Problema 15. Un alpinista extremo monitorea oxigenación en la cima calculando elevación $E = 30000\log(P_0/P)$. Obtenga la altitud si los barómetros leen décima parte de la lectura base perimetral.

Problema 16. Las presas hidráulicas evaporan represamiento en días calculados con $d = 20\ln(100/A)$. Determine días agotados para que la zona árida baje al cien por ciento evapotranspirado.

Problema 17. Un cultivo celular secretor satura enzima modelada cinéticamente $C(v) = \ln(v^2 + 1)$. Cuantifique la producción bioquímica cuando la velocidad biológica sistémica decaiga completamente frenada a cero absoluto.

Problema 18. Cierta ola de desinformación social penetra usuarios requiriendo días $t = 5\log_3(U/10)$. Formule tiempo propagado involucrado logrando contaminar ideológicamente a noventa individuos activos diariamente expuestos.

Problema 19. Los condensadores electrónicos de placas almacenan miliamperios en nanosegundos $t = -2\ln(1-C)$. Puntualice el cronómetro milisegundo al recargar capacitancia completamente vacía sin flujo eléctrico residente.

Problema 20. La sonda interplanetaria enciende propulsores logrando incremento balístico ecuacional $V = 4\ln(m_i/m_f)$. Valore propulsión expulsando combustible hasta que la tara restante sea base e veces inferior al chasis.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $M = 3$.
2. Dom: $(8, \infty)$.
3. A.V. $x = -4$.
4. $3 + 3 = 6$.
5. Dom: $(-\infty, 5)$.
6. $(0, 0)$.
7. $x = 7$.
8. A.V. $x = 1/4$.
9. $f^{-1}(x) = \log_{10}(x + 3)$.
10. $1/3$.
11. Dom: $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$.
12. $x = 5$.
13. Ran: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
14. $g^{-1}(x) = e^{x-4} + 2$.
15. $x = 2$ (-5 se rechaza).
16. $5 - (-3) = 8$.
17. A.V. $x = 7$.
18. $x > 2$.
19. Dom: $(0, 1) \cup (1, \infty)$.
20. $x = 3$.

Propuestos de Aplicación

1. Magnitud 5.
2. pH de 4.
3. 90 decibelios acústicos.
4. $5 \ln(2)$ unidades temporales.
5. $\ln(2)/0{,}02 \approx 34{,}6$ años.
6. 9 horas transcurridas.
7. $-15 \ln(e/100) = 15(2 \ln 10 - 1)$ m.
8. 2000 dólares facturados.
9. 30 palabras/minuto ($\ln 1 = 0$).
10. 85 % retención inicial.
11. Magnitud estelar 10.
12. 6 bits procesados.
13. $10 \ln(2)$ meses ($\approx 6{,}9$).
14. 12 megapascales tope.
15. 30000 altitud unidades.
16. 0 días (no hay evaporación).
17. 0 producción celular.
18. 10 días requeridos.
19. 0 nanosegundos (instantáneo).
20. 4 unidades balísticas ($4 \ln e = 4$).

$\log_a$

¡Misión Cumplida!

’Todo gran problema complejo en la vida tiene su propia función inversa. Si el estrés y los desafíos crecen de forma exponencial, recuerda que siempre tienes el poder de aplicar la lógica y reducirlos.’

- Desarmando el Exponente

¡Excelente trabajo! Has logrado dominar los logaritmos, las herramientas analíticas definitivas para transformar los crecimientos más incontrolables en simple aritmética y control.

$\ln$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com