$f^{-1}(f(x)) = x$

PRECÁLCULO

FUNCIONES INVERSAS

CUADERNO DE TRABAJO

Definición, Cálculo Analítico y Simetría

$y = x$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Deshaciendo el Camino

Una función matemática es un proceso que transforma una entrada (x) en una salida (y). Una **función inversa** es la máquina que hace exactamente el proceso contrario: toma la salida y te devuelve la entrada original.

PROFE TEO

¡Advertencia letal! El símbolo $f^{-1}(x)$ NO significa $\frac{1}{f(x)}$. El exponente -1 aquí es una notación exclusiva de reversión, no un recíproco algebraico.

1. Funciones Inyectivas (Uno a Uno)

Para que una función $f(x)$ tenga una inversa real que también sea función, debe ser **inyectiva** (uno a uno). Esto significa que cada valor de salida y debe provenir de un **único** valor de entrada x.

- **Prueba de la Línea Horizontal:** Si trazas cualquier línea horizontal en la gráfica y esta corta la curva en *más de un punto*, la función NO tiene inversa.

2. Cálculo Analítico de $f^{-1}(x)$

El algoritmo infalible para hallar la ecuación de una función inversa consta de cuatro pasos lógicos:

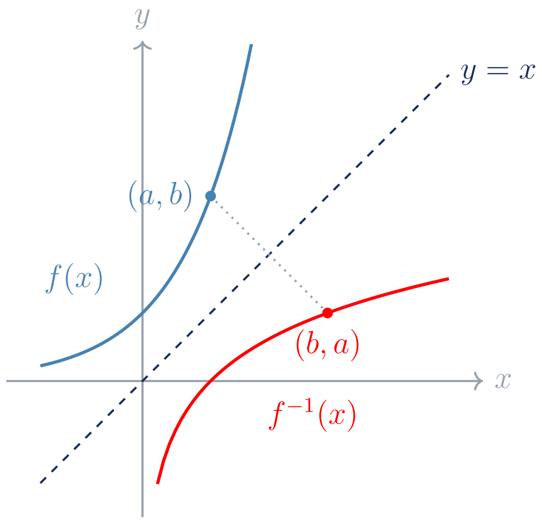
1. Cambia la notación $f(x)$ por y.
2. **Intercambia** las variables x e y en la ecuación. (Esto refleja la esencia de invertir dominios y rangos).
3. Despeja la nueva variable y usando álgebra.
4. Cambia la y despejada por la notación formal $f^{-1}(x)$.

PROFE TEO

La relación entre dominios es cruzada: El Dominio de f es el Rango de f^{-1}, y el Rango de f es el Dominio de f^{-1}. ¡Son espejos totales!

3. Simetría Geométrica ($y = x$)

Las gráficas de $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ son reflexiones perfectas la una de la otra a través de la recta diagonal principal $y = x$. Si el punto (a, b) pertenece a f, entonces obligatoriamente el punto (b, a) pertenece a f^{-1}.



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Cálculo en Función Lineal

Enunciado: Halle la función inversa de $f(x) = 5x - 7$.
Solución: Paso 1: $y = 5x - 7$.
Paso 2 (Intercambio): $x = 5y - 7$.
Paso 3 (Despeje): $x + 7 = 5y \implies y = \frac{x+7}{5}$.
Respuesta: $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{5}$.

Problema Resuelto 2: Inversa de Función Racional

Enunciado: Encuentre $f^{-1}(x)$ para $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.
Solución: $y = \frac{2x+1}{x-3} \implies x = \frac{2y+1}{y-3}$.
Multiplicamos cruzado: $x(y - 3) = 2y + 1 \implies xy - 3x = 2y + 1$.
Agrupamos las y: $xy - 2y = 3x + 1 \implies y(x - 2) = 3x + 1$.
Despejamos y: $y = \frac{3x+1}{x-2}$.
Respuesta: $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

PROFE TEO
Para invertir funciones cuadráticas, primero DEBES restringir su dominio (ej. $x \geq 0$). Si no lo haces, la función falla la prueba de la línea horizontal y la inversa no existiría matemáticamente.

Problema Resuelto 3: Restricción de Dominio Cuadrático

Enunciado: Halle la inversa de $f(x) = x^2 + 4$ para $x \geq 0$.
Solución: $y = x^2 + 4 \implies x = y^2 + 4$.
Despejando: $y^2 = x - 4 \implies y = \pm\sqrt{x - 4}$.
Como el dominio original exigía $x \geq 0$, el rango de la inversa debe ser positivo, elegimos la raíz positiva: $y = \sqrt{x - 4}$.
Respuesta: $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 4}$, para $x \geq 4$.

Problema Resuelto 4: Veridad por Composición

Enunciado: Demuestre mediante composición que $f(x) = 2x - 8$ y $g(x) = \frac{x}{2} + 4$ son inversas.
Solución: Evaluamos $f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} + 4\right) = 2\left(\frac{x}{2} + 4\right) - 8$.
Distribuimos: $x + 8 - 8 = x$.
Evaluamos $g(f(x)) = g(2x - 8) = \frac{2x-8}{2} + 4 = x - 4 + 4 = x$.
Como ambas composiciones dan x, la prueba de identidad es exitosa.

Problema Resuelto 5: Simetría de Coordenadas

Enunciado: Si $f(x) = x^3 - 2$ tiene el punto $(2, 6)$, halle $f^{-1}(6)$ sin calcular la ecuación de la inversa.
Solución: Si el punto $(2, 6)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$, esto significa que $f(2) = 6$.
Por la propiedad de simetría reflexiva, si entra un 2 y sale un 6, en la función inversa debe entrar un 6 para devolver el 2.
Respuesta: $f^{-1}(6) = 2$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Conversión Termodinámica

Contexto: La escala Fahrenheit respecto a Celsius obedece $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$. Extraiga la fórmula invertida para obtener grados Celsius a partir de una lectura Fahrenheit.
Solución: $F = \frac{9}{5}C + 32 \implies F - 32 = \frac{9}{5}C$.
Multiplicamos por $\frac{5}{9}$: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.
Respuesta: El modelo inverso es $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Aplicación 2: Criptografía Clásica

Contexto: Un algoritmo codifica contraseñas bajo la regla $C(x) = 4x + 10$. Elabore la llave de descodificación que los servidores necesitan para recuperar el dígito x original.
Solución: $y = 4x + 10 \implies x = 4y + 10$.
Despejando y: $4y = x - 10 \implies y = \frac{x-10}{4}$.
Respuesta: La llave descodificadora es $C^{-1}(x) = \frac{x-10}{4}$.

PROFE TEO
Las funciones inversas en la vida real siempre responden a la pregunta: Conozco el resultado final, ¿cómo retrocedo el tiempo para saber con cuánto comencé?

Aplicación 3: Dinámica Forense

Contexto: Un perito calcula la energía de impacto con $E(v) = 0{,}5v^2$ para $v \geq 0$. Modele la ecuación opuesta requerida para inferir la velocidad según los daños materiales.
Solución: $E = 0{,}5v^2 \implies v^2 = 2E$.
Como la velocidad es positiva: $v = \sqrt{2E}$.
Respuesta: El perito usará $v(E) = \sqrt{2E}$.

Aplicación 4: Intercambio de Divisas

Contexto: Un portal cambiario vende yenes por dólares bajo $Y(d) = 140d - 200$, restando comisiones fijas. Programe la función que convierta el capital japonés nuevamente a moneda americana.
Solución: $y = 140x - 200 \implies x = 140y - 200$.
$140y = x + 200 \implies y = \frac{x+200}{140}$.
Respuesta: La conversión retroactiva es $d(Y) = \frac{Y+200}{140}$.

Aplicación 5: Propagación de Audio

Contexto: El eco en un teatro retrasa ondas según el área $T(A) = \frac{A}{300} + 1$. Derive el cálculo retrógrado que estima el área conociendo el desfase del sonido.
Solución: $T = \frac{A}{300} + 1 \implies T - 1 = \frac{A}{300}$.
Despejamos A: $A = 300(T - 1)$.
Respuesta: La función de espacio acústico es $A(T) = 300(T - 1)$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o gráfico.

1. Una circunferencia no representa una función, ¿por qué es totalmente imposible hablar de la "función inversa de una circunferencia¿ Use las pruebas de líneas para justificar.

2. Si evaluamos $(f \circ f^{-1})(x)$, el resultado siempre es x. Explique conceptualmente por qué ocurre esta çancelación"perfecta de operaciones.

3. Demuestre por qué la función $f(x) = |x|$ carece de función inversa en todo el dominio $\mathbb{R}$. Sugiera un dominio restringido donde sí exista.

4. Geométricamente, si trazamos $y = x$, ¿qué ocurre con un segmento de curva que cruza exactamente por esta recta diagonal al graficar su inversa?

5. Argumente por qué una función polinómica de grado par nunca tendrá inversa sin restricciones, mientras que una de grado impar (como x^3) sí la tiene en $\mathbb{R}$.

6. El dominio de $f(x) = \sqrt{x-2}$ es $[2, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. Sin calcular la ecuación inversa, determine rigurosamente el dominio y rango de $f^{-1}(x)$.

7. ¿Por qué la función constante $f(x) = 7$ falla miserablemente la prueba de la línea horizontal? ¿Qué significaría en el mundo real que tuviera inversa?

8. Si el intercepto con el eje Y de una función es $(0, -5)$, ¿cuál será obligatoriamente el intercepto con el eje X de su respectiva función inversa?

9. Al intercambiar las variables x e y en la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, la ecuación queda idéntica. ¿Qué nos indica esto sobre su simetría gráfica?

10. Explique por qué la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función logarítmica $g(x) = \log_2(x)$ son el ejemplo supremo de funciones inversas en matemáticas superiores.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule la función inversa de $f(x) = 7x + 3$.

Guía de Solución Interactiva

1. Cambia $f(x)$ por y, y luego intercambia variables: $x = 7\_\_\_\_\_\_ + 3$.
2. Pasa el 3 restando: $x - \_\_\_\_\_ = 7y$.
3. Divide entre 7 y escribe la notación formal: $f^{-1}(x) = \frac{\_\_\_\_\_\_}{7}$.

Problema 2. Halle $f^{-1}(x)$ para $f(x) = \frac{x-2}{x+4}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Intercambiamos: $x = \frac{y-2}{y+4}$. Multiplica cruzado: $x(\_\_\_\_\_\_) = y - 2$.
2. Distribuye y agrupa las 'y' en un lado: $xy - \_\_\_\_\_ = -4x - 2 \implies y(x - \_\_\_\_\_) = -4x - 2$.
3. Despeja y: $f^{-1}(x) = \frac{\_\_\_\_\_\_}{x-1}$.

Problema 3. Halle $f^{-1}(x)$ para $f(x) = x^3 - 8$.

Guía de Solución Interactiva

1. Intercambiamos variables: $x = y^3 - \_\_\_\_\_$.
2. Aislamos el término cúbico: $y^3 = x + \_\_\_\_\_$.
3. Extraemos raíz a ambos lados: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\_\_\_\_\_\_}$.

PROFE TEO
Al lidiar con inversas de fracciones algebraicas, asegúrate de factorizar bien la variable 'y'. Si no la aíslas, jamás podrás mandarla al otro lado dividiendo.

Problemas Generales

Problema 4. Calcule la inversa de $f(x) = -2x + 10$.

Problema 5. Encuentre $g^{-1}(x)$ si $g(x) = \frac{4}{x-5}$.

Problema 6. Halle la inversa de $h(x) = \frac{5x}{2x-3}$.

Problema 7. Determine $f^{-1}(x)$ para $f(x) = (x+1)^3$.

Problema 8. Calcule la función inversa de $f(x) = \sqrt[5]{x-4}$.

Problema 9. Encuentre la inversa de la cuadrática restringida $f(x) = (x-2)^2,\ x \geq 2$.

Problema 10. Demuestre algebraicamente si $f(x) = \frac{1}{x}$ es su propia inversa.

Problema 11. Halle $f^{-1}(x)$ para $f(x) = \sqrt{x+7} - 3$, asumiendo dominio válido.

Problema 12. Determine la inversa del modelo logarítmico $f(x) = \ln(x-1)$.

Problema 13. Halle la inversa del modelo exponencial $g(x) = e^{3x} + 2$.

Problema 14. Determine la inversa de la función polinómica $h(x) = 2x^5 + 3$.

Problema 15. Calcule $f^{-1}(x)$ para la fracción continua $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Problema 16. Sin calcular la fórmula, halle $f^{-1}(10)$ sabiendo que $f(x) = x^3 + x + 8$.

Problema 17. Extraiga la regla invertida para $f(x) = 10^{x+4} - 1$.

Problema 18. Encuentre $f^{-1}(x)$ si la parábola restringida es $f(x) = -x^2 + 9$, $x \leq 0$.

Problema 19. Si $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$, demuestre que $f^{-1}(x) = f(x)$.

Problema 20. Halle el dominio de $f^{-1}(x)$ si el rango base es $\mathrm{Ran}(f) = [-15, 20)$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La presión de un fluido es $P(d) = 15d + 100$. Modele la función que infiere la profundidad hídrica a partir de lecturas barométricas registradas.

Guía de Solución Interactiva

1. Cambia notación: $P = 15d + 100 \implies d = 15\_\_\_\_\_\_ + 100$. 2. Despeja la nueva variable: $15P = d - \_\_\_\_\_$. 3. Función inversa de profundidad: $d(P) = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_}{15}$.

Problema 2. La intensidad óptica de un prisma focal rige por $L(e) = e^3$. Determine la expresión retrógrada para predecir el grosor de cristal necesario.

Guía de Solución Interactiva

1. Ecuación base: $L = e^3 \implies e = \_\_\_\_\_\_\_\_^3$. 2. Aislar variable extrayendo raíz ________. 3. Expresión del grosor de cristal: $e(L) = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

Problema 3. Una fábrica empaca transistores bajo la ecuación $E(t) = \frac{100t}{t+2}$. Derive el tiempo de maquinaria en base a metas de unidades empaquetadas requeridas.

Guía de Solución Interactiva

1. Intercambio: $t = \frac{100E}{E+2}$. Cruce: $t(E + 2) = \_\_\_\_\_\_\_\_$. 2. Agrupación: $tE - 100E = \_\_\_\_\_ \implies E(t - 100) = -2t$. 3. Deducción de tiempo: $t(E) = \frac{-2E}{\_\_\_\_\_\_\_\_}$.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un químico diluye reactivos logrando un nivel de pureza $C(x) = \sqrt{x + 10}$. Modele el modelo invertido que arroje la concentración química inicial requerida.

Problema 5. Una tuneladora excava roca sólida avanzando $M(h) = 5h - 12$. Extraiga la regla de correspondencia opuesta para programar turnos horarios precisos del equipo motorizado.

Problema 6. El algoritmo de compresión disminuye el peso de archivos siguiendo $W(b) = \frac{b}{4} + 1$. Deduzca el tamaño original en megabytes de cualquier respaldo comprimido recuperado.

Problema 7. La temperatura de enfriamiento de un motor aeronáutico marca $T(m) = \frac{500}{m+1}$. Despeje la variable original para averiguar los minutos transcurridos tras el apagado.

Problema 8. El campo magnético de un levitador decae por $F(x) = 10 - x^3$. Encuentre la ecuación regresiva que estime la distancia de repulsión ferromagnética experimentada.

Problema 9. Una cosechadora rinde parcelas equivalentes a $A(s) = 20(s-1)^2$ para $s \geq 1$. Determine la función matemática retrógrada para precalcular sacos de semillas necesarios.

Problema 10. El satélite de telecomunicaciones ajusta su ping según latencia $L(r) = e^{r-2}$. Formule la dependencia al revés que revele el radio de transmisión geoestacionario.

Problema 11. Un ascensor panorámico sube pisos contabilizando voltios mediante $V(p) = \frac{3p+5}{p}$. Extraiga la configuración invertida que procese el tablero electrónico del elevador neumático.

Problema 12. La propagación de una mancha de aceite oceánica cubre $E(d) = d^2 + 4d + 4$, con días de marea $d \geq -2$. Confeccione el modelo temporal regresivo oceánico.

Problema 13. La densidad de píxeles renderizados en tarjetas gráficas satura memorias como $R(v) = \ln(v+5)$. Plantee la función que cuantifica memoria VRAM encriptada consumida.

Problema 14. El blindaje acústico reduce ruido urbano aplicando $D(c) = \sqrt[3]{c-8}$. Construya la relación inversa estipulando la capacidad del corcho aislante aislante instalado.

Problema 15. Una hidroeléctrica abre compuertas soltando caudal por $Q(v) = 2^v + 10$. Invierta la proyección para controlar válvulas sabiendo el desfogue pluvial resultante.

Problema 16. Las cepas víricas mutan invadiendo tejidos $I(t) = \frac{t^3}{5}$. Evalúe el marco temporal predictivo extrayendo la inversa del comportamiento infeccioso celular documentado.

Problema 17. Un sismógrafo amortigua vibraciones calibrando ondas $W(m) = \log_{10}(m)$. Invierta el indicador para visualizar directamente la magnitud de ruptura de placas tectónicas detectadas.

Problema 18. La tensión de carga en cables tensores arquitectónicos cede por $C(f) = (f+1)^5$. Genere la ecuación contraria midiendo la fuerza de gravedad estructural absorbida.

Problema 19. Una batería ecológica capta iones marcando $B(k) = \frac{k+2}{k-3}$. Desarrolle la recíproca algorítmica incrustada en microchips para monitorear el amperaje en red interna.

Problema 20. La dosis radicular hidropónica absorbe químicos dictando el pH como $P(n) = \sqrt{n^2 - 16}$, para $n \geq 4$. Calcule los nutrientes nitrados invertidos requeridos botánicamente.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{7}$
2. $f^{-1}(x) = \frac{-4x-2}{x-1}$
3. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+8}$
4. $f^{-1}(x) = \frac{x-10}{-2}$
5. $g^{-1}(x) = \frac{4}{x} + 5$
6. $h^{-1}(x) = \frac{3x}{2x-5}$
7. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$
8. $f^{-1}(x) = x^5 + 4$
9. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$
10. Sí, $(1/x)^{-1} = 1/x$.
11. $f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 7$
12. $f^{-1}(x) = e^x + 1$
13. $g^{-1}(x) = \frac{\ln(x-2)}{3}$
14. $h^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{x-3}{2}}$
15. $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{1-x}$
16. $x = 1$ (porque $1^3 + 1 + 8 = 10$)
17. $f^{-1}(x) = \log_{10}(x+1) - 4$
18. $f^{-1}(x) = -\sqrt{9-x}$
19. Comprobación exitosa.
20. Dom $f^{-1} = [-15, 20)$

Propuestos de Aplicación

1. $d(P) = \frac{P-100}{15}$
2. $e(L) = \sqrt[3]{L}$
3. $t(E) = \frac{2E}{100-E}$
4. $x(C) = C^2 - 10$
5. $h(M) = \frac{M+12}{5}$
6. $b(W) = 4(W-1)$
7. $m(T) = \frac{500}{T} - 1$
8. $x(F) = \sqrt[3]{10-F}$
9. $s(A) = \sqrt{\frac{A}{20}} + 1$
10. $r(L) = \ln(L) + 2$
11. $p(V) = \frac{5}{V-3}$
12. $d(E) = \sqrt{E} - 2$
13. $v(R) = e^R - 5$
14. $c(D) = D^3 + 8$
15. $v(Q) = \log_2(Q-10)$
16. $t(I) = \sqrt[3]{5I}$
17. $m(W) = 10^W$
18. $f(C) = \sqrt[5]{C} - 1$
19. $k(B) = \frac{3B+2}{B-1}$
20. $n(P) = \sqrt{P^2+16}$

$x = f^{-1}(y)$

¡Llegaste al Final!

'Conocer la respuesta es solo la mitad del camino. Aprender a retroceder y descubrir el origen de todo es la marca de un verdadero maestro.'

- La magia del reflejo algebraico

¡Felicidades! Has dominado el arte de invertir funciones. Ahora ninguna ecuación oculta podrá esconderte de dónde vino ni a dónde va.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com