

HOJA DE TRUCOS: EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

MATERIAL DE REPASO RÁPIDO CREADO POR PROF. TEÓFILO TEVES — WWW.TEOTEVES.COM

1. Funciones Exponenciales

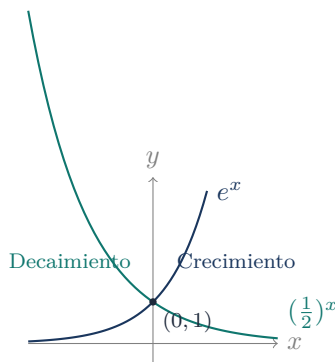
La función exponencial con base a se define para todos los números reales x por:

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

- **Dominio:** $(-\infty, \infty)$ • **Rango:** $(0, \infty)$
- **Intercepto en y :** $(0, 1)$, pues $a^0 = 1$.
- **Asíntota Horizontal:** El eje x ($y = 0$).

El Número de Euler (e)

El número $e \approx 2.71828\dots$ es la base natural. La función $f(x) = e^x$ es la función exponencial más utilizada en cálculo y aplicaciones continuas.



2. Funciones Logarítmicas

El logaritmo es la **función inversa** de la función exponencial.

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

"El logaritmo en base a de x es el exponente al que hay que elevar a para obtener x ".

- **Dominio:** $(0, \infty)$ (¡Solo argumentos positivos!).
- **Rango:** $(-\infty, \infty)$.
- **Intercepto en x :** $(1, 0)$, pues $\log_a(1) = 0$.
- **Asíntota Vertical:** El eje y ($x = 0$).

Logaritmos Especiales

- **Logaritmo Común:** Base 10. $\log(x)$ significa $\log_{10}(x)$.
- **Logaritmo Natural:** Base e . $\ln(x)$ significa $\log_e(x)$.

3. Propiedades de los Logaritmos

Las propiedades permiten expandir o condensar expresiones. Sean $M, N > 0, a > 0, a \neq 1$:

Propiedad	Fórmula
Del Producto	$\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N)$
Del Cociente	$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$
De la Potencia	$\log_a(M^r) = r \cdot \log_a(M)$
Inversa	$a^{\log_a(x)} = x$ y $\log_a(a^x) = x$

▲ Errores Mortales Prohibidos

1. $\log_a(M + N) \neq \log_a(M) + \log_a(N)$
 2. $\frac{\log_a(M)}{\log_a(N)} \neq \log_a(M - N)$
- El logaritmo de una suma no se puede separar.

4. Fórmula de Cambio de Base

Para calcular logaritmos en bases distintas a 10 o e en la calculadora, usamos el cambio de base a una nueva base b :

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

5. Ecuaciones Exponenciales

La variable se encuentra en el exponente.

Estrategia 1: Bases Iguales

Si puedes expresar ambos lados con la misma base:

$$a^u = a^v \implies u = v$$

Ejemplo: $2^{3x} = 8 \implies 2^{3x} = 2^3 \implies 3x = 3 \implies x = 1$.

Estrategia 2: Tomar Logaritmos

Si las bases no coinciden, aísla la parte exponencial y aplica \ln o \log a ambos lados, bajando el exponente con la propiedad de la potencia.

$$\begin{aligned} 5^x &= 7 \\ \ln(5^x) &= \ln(7) \\ x \ln(5) &= \ln(7) \implies x = \frac{\ln(7)}{\ln(5)} \end{aligned}$$

6. Ecuaciones Logarítmicas

La variable está dentro del argumento del logaritmo.

Algoritmo Universal

1. Condensa todos los logaritmos en uno solo usando las propiedades (producto o cociente).

2. Aísla el logaritmo en un lado de la ecuación.
3. Transforma a forma exponencial: $\log_a(u) = c \implies a^c = u$.
4. Resuelve para la variable.

▲ Verificación Obligatoria

¡Debes comprobar tus soluciones! El argumento original de cada logaritmo **debe ser estrictamente mayor a 0**. Si una solución genera un $\log(-x)$, debes descartarla.

7. Modelos de Crecimiento y Decaimiento

Muchos fenómenos naturales (población, finanzas, radiactividad) siguen un modelo exponencial:

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

- $N(t)$: Cantidad en el tiempo t .
- N_0 : Cantidad inicial (cuando $t = 0$).
- r : Tasa relativa (si $r > 0$ es crecimiento, si $r < 0$ es decaimiento).
- t : Tiempo transcurrido.

Aplicaciones Clásicas

- **Interés Compuesto Continuumente:** $A = Pe^{rt}$ (donde P es el capital).
- **Vida Media (h):** El tiempo necesario para que la cantidad se reduzca a la mitad. Relación directa: $r = -\frac{\ln(2)}{h}$.