$f(x) = a^x$

PRECÁLCULO

FUNCIONES EXPONENCIALES

CUADERNO DE TRABAJO

Definición, Gráfica y el Número e

$e \approx 2{,}718$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Crecimiento Incontenible

Una **función exponencial** es aquella donde la variable independiente x se encuentra en el exponente y la base es una constante: $f(x) = a^x$.

PROFE TEO
¡Ojo aquí! La base "a"NUNCA puede ser negativa ni 1. Si fuera 1, tendrías $1^x = 1$, ¡que es solo una línea recta y aburrida!

1. Definición Formal y Restricciones

La función exponencial base a se define como $f(x) = a^x$, donde:

- La base a es un número real positivo ($a > 0$).
- La base a es diferente de uno ($a \neq 1$).
- El exponente x puede ser cualquier número real ($x \in \mathbb{R}$).

Dominio: $\text{Dom} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
Rango: $\text{Ran} = (0, \infty)$ (nunca toca el cero ni es negativa).

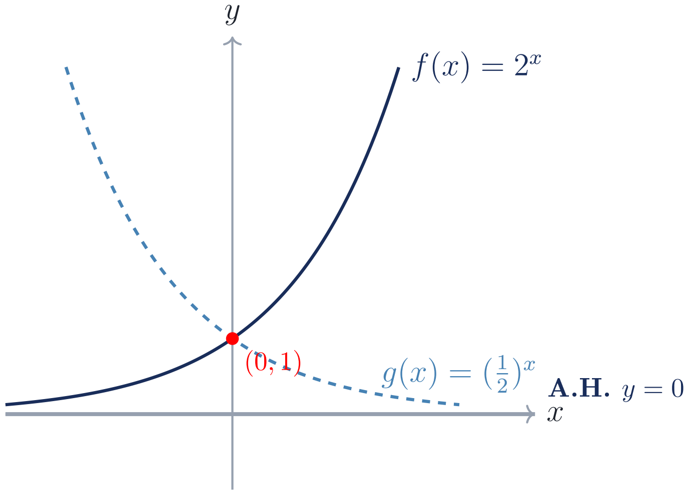
PROFE TEO
Las asíntotas horizontales (A.H.) persiguen a estas funciones por debajo. $y = 0$ es su piso natural, a menos que sumes o restes algo al final de la función.

2. Comportamiento Gráfico

La gráfica depende del valor de la base a:

- **Crecimiento Exponencial ($a > 1$):** La curva sube rápidamente hacia la derecha. Mientras mayor es a, más empinada es.
- **Decaimiento Exponencial ($0 < a < 1$):** La curva baja de izquierda a derecha acercándose a cero.

Características clave de $f(x) = a^x$: 1. Siempre cruzan el eje Y en $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$.
2. Tienen una **Asíntota Horizontal** en el eje X, es decir, $y = 0$.



3. El Número de Euler (e) y la Función Natural

La función exponencial más importante en matemáticas puras y aplicadas es la función exponencial natural: $f(x) = e^x$.

- El número e es un número irracional: $e \approx 2{,}718281828...$
- Se define mediante el límite: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Conserva todas las propiedades gráficas ($e > 1$, por lo tanto, es creciente).

PROFE TEO

El número e es el *rey* del cálculo. Representa el crecimiento perfecto y continuo. Aparece siempre que las cosas crecen sin pausas, como la población o el interés continuo.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Desplazamientos Gráficos

Enunciado: Determine el dominio, rango y la asíntota horizontal (A.H.) de $f(x) = 3^{x-2} - 5$.
Solución: 1. **Dominio:** Toda función exponencial simple acepta cualquier real en el exponente. $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.
2. **A.H.:** El desplazamiento vertical está dado por la constante. Originalmente es $y = 0$, pero baja 5 unidades. **A.H.:** $y = -5$.
3. **Rango:** La gráfica va desde la asíntota hacia arriba (ya que el coeficiente de la base es $+1$). $\text{Ran} f = (-5, \infty)$.

PROFE TEO

Las ecuaciones exponenciales se rinden si logras que ambos lados tengan la misma base. ¡Factoriza los números grandes!

Problema Resuelto 2: Ecuación Básica

Enunciado: Resuelva para x: $4^{2x-1} = 64$.
Solución: Buscamos igualar bases. Sabemos que $64 = 4^3$. Reescribimos la ecuación: $4^{2x-1} = 4^3$. Al tener bases iguales, los exponentes deben ser iguales:

$$2x - 1 = 3$$

$$2x = 4 \implies x = 2$$

Problema Resuelto 3: Bases Ocultas

Enunciado: Resuelva la ecuación $9^x - 12(3^x) + 27 = 0$.
Solución: Notamos que $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$. Sustituimos con una variable auxiliar $u = 3^x$:

$$u^2 - 12u + 27 = 0$$

Factorizamos: $(u-9)(u-3) = 0$. Soluciones: $u = 9$ o $u = 3$. Regresamos a la variable x:
Si $3^x = 9 \implies 3^x = 3^2 \implies x = 2$.
Si $3^x = 3 \implies 3^x = 3^1 \implies x = 1$.

Problema Resuelto 4: Encontrando el Modelo

Enunciado: Halle la función del tipo $f(x) = C \cdot a^x$ que pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(2, 45)$.
Solución: 1. Usamos $(0, 5)$: $f(0) = C \cdot a^0 \implies C(1) = 5 \implies C = 5$. 2. La función es $f(x) = 5 \cdot a^x$. 3. Usamos $(2, 45)$: $45 = 5 \cdot a^2 \implies 9 = a^2$. 4. Como $a > 0$, concluimos que $a = 3$. **Respuesta:** $f(x) = 5(3)^x$.

Problema Resuelto 5: Desigualdades Exponenciales

Enunciado: Resuelva $e^{x^2} > e^{4x}$.
Solución: Como la base $e \approx 2{,}718$ es mayor a 1, la función es estrictamente creciente. Al quitar las bases, la desigualdad se mantiene igual:

$$x^2 > 4x \implies x^2 - 4x > 0 \implies x(x-4) > 0$$

Analizamos puntos críticos (0 y 4) en la recta numérica.
Conjunto Solución: $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Crecimiento Celular

Contexto: Un cultivo de laboratorio inicia con 150 células. Se triplican cada hora siguiendo $C(t) = 150(3^t)$. Calcule la cantidad exacta tras 4 horas.
Solución: Sustituimos directamente $t = 4$ en la función de crecimiento.

$$C(4) = 150(3^4) = 150(81) = 12150$$

Respuesta: Habrá 12,150 células en el cultivo.

Aplicación 2: Desintegración Isotópica

Contexto: Un elemento radiactivo decae bajo $M(t) = 80e^{-0,1t}$ en gramos, con t en años. Establezca cuántos gramos restarán tras una década.
Solución: Una década equivale a $t = 10$.

$$M(10) = 80e^{-0,1(10)} = 80e^{-1} = 80\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$M(10) \approx 80(0{,}3678) \approx 29{,}43$$

Respuesta: Quedarán aproximadamente 29.43 gramos.

Aplicación 3: Finanzas Capitalizadas

Contexto: Un capital de \$5000 gana intereses continuamente a tasa del 4 % anual según $A(t) = 5000e^{0,04t}$. Calcule el saldo a los 5 años.
Solución: Reemplazamos $t = 5$.

$$A(5) = 5000e^{0,04(5)} = 5000e^{0,2}$$

Evaluando $e^{0,2} \approx 1{,}2214$:

$$A(5) \approx 5000(1{,}2214) \approx 6107$$

Respuesta: El saldo acumulado ascenderá a \$6107.

PROFE TEO
El decaimiento (e con exponente negativo) modela todo lo que se enfría, se desgasta o se olvida. ¡La naturaleza ama el número e!

Aplicación 4: Choque Térmico

Contexto: Un componente industrial candente se refrigera marcando $T(m) = 25 + 150e^{-0,5m}$ grados centígrados. Determine la temperatura del sistema apenas arranca ($m = 0$).
Solución: Evaluamos el tiempo inicial $m = 0$.

$$T(0) = 25 + 150e^{-0,5(0)} = 25 + 150e^{0}$$

Como $e^0 = 1$:

$$T(0) = 25 + 150(1) = 175$$

Respuesta: Arranca a 175 grados centígrados.

Aplicación 5: Proyección Cibernética

Contexto: La carga de servidores por un ataque masivo se duplica por horas mediante $S(h) = 10(2^h)$ terabytes. Verifique si superará los 300 terabytes al cumplirse 5 horas.
Solución: Evaluamos a las 5 horas ($h = 5$).

$$S(5) = 10(2^5) = 10(32) = 320$$

Respuesta: Sí, con 320 terabytes proyectados, superará la marca impuesta de 300 terabytes.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué la definición estricta de una función exponencial exige que la base no pueda ser $a = 1$?
2. Argumente algebraicamente qué sucedería si permitiéramos que la base fuera negativa (ej. $a = -2$) y evaluáramos $x = 1/2$.
3. ¿Es matemáticamente posible que la gráfica de $f(x) = e^x$ intercepte al eje X? Justifique su respuesta basándose en su rango.
4. Visualmente, ¿cómo diferenciaría la gráfica de la parábola $y = x^2$ de la curva exponencial $y = 2^x$ en el cuadrante de valores positivos altos para x?
5. Un compañero afirma que 3^{-x} arroja valores negativos. Corrija este error común utilizando las propiedades de los exponentes.
6. Si desplazamos la función $g(x) = 5^x$ mediante la regla $g(x) - 10$, ¿cómo y por qué se ve afectada su Asíntota Horizontal?
7. Si analiza $f(x) = a^x$ y $g(x) = (1/a)^x$, ¿qué tipo de simetría presentan entre ambas respecto a los ejes cartesianos?
8. ¿Por qué se prefiere utilizar la base e en modelos financieros y biológicos de crecimiento en lugar de bases enteras como 2 o 10?
9. ¿Existe algún punto de intersección universal donde absolutamente todas las funciones del tipo $f(x) = a^x$ (sin desplazamientos) coincidan siempre? ¿Cuál es y por qué?
10. A largo plazo ($x \to \infty$), ¿qué modelo crecerá de forma más violenta e insuperable: un polinomio de grado 1000 (x^{1000}) o la exponencial más simple (2^x)?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle dominio, A.H. y rango de $f(x) = 4^{x+1} + 3$.

Guía de Solución Interactiva

1. El dominio de toda función exponencial estándar es ________.
2. La A.H. está dictada por el valor constante exterior. Por tanto, $y =$ ____.
3. Como la base es positiva, la curva está por encima de la A.H. Rango: $(\_\_\_\_, \infty)$.

Problema 2. Resuelva la ecuación exponencial $2^{3x-5} = 16$.

Guía de Solución Interactiva

1. Expresa 16 con base 2: $16 = 2^{\_\_}$.
2. Iguala ambos exponentes al tener bases idénticas: $3x - 5 = \_\_$.
3. Despeja la variable: $3x = \_\_ \implies x = \_\_\_\_$.

Problema 3. Determine el punto de intersección con el eje Y para $g(x) = 5e^{2x} - 1$.

Guía de Solución Interactiva

1. Para hallar el intercepto en Y, evaluamos cuando la variable $x =$ ____.
2. Sustituyendo: $g(0) = 5e^{2(\_\_)} - 1 = 5e^{\_\_} - 1$.
3. Sabiendo que $e^0 = 1$, operamos: $g(0) = 5(\_\_) - 1 =$ ____. El punto es $(0, \_\_\_\_)$.

PROFE TEO

Para interceptos en Y, solo necesitas hacer $x = 0$. ¡Cualquier base no nula elevada a cero siempre es 1!

Problemas Generales

Problema 4. Resuelva la ecuación $5^{x+2} = 125^x$.

Problema 5. Determine la A.H. y el rango de $h(x) = -2^x + 7$.

Problema 6. Evalúe la función $P(t) = 1000e^{-0,2t}$ cuando $t = 0$.

Problema 7. Resuelva para x: $7^{x^2-4} = 1$.

Problema 8. Halle el dominio y rango de $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 4$.

Problema 9. Encuentre la base a si la gráfica de $f(x) = a^x$ pasa por $(-1, 4)$.

Problema 10. Resuelva analíticamente $e^{3x} \cdot e^2 = e^{x+8}$.

Problema 11. Indique el intercepto en Y de $y = -3(4^{x+1}) + 10$.

Problema 12. Resuelva mediante factorización: $4^x - 3(2^x) - 4 = 0$.

Problema 13. Determine para qué valores de x se cumple que $(1/2)^x > 8$.

Problema 14. Halle el punto exacto donde se cruzan $y = 3^x$ y $y = 9^{x-2}$.

Problema 15. Determine el rango de $g(x) = |2^x - 3|$.

Problema 16. Resuelva el sistema exponencial: $2^{x+y} = 16$ y $3^{x-y} = 9$.

Problema 17. Si $f(x) = e^{2x}$, evalúe e interprete simplificando: $f(\ln 3)$.

Problema 18. Resuelva la inecuación: $e^{x^2+3x} \leq 1$.

Problema 19. Construya $f(x) = C \cdot e^{kx}$ si $f(0) = 2$ y $f(1) = 2e^3$.

Problema 20. Halle las raíces reales de $x^2e^x - 4e^x = 0$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Ciertas microalgas fotosintéticas ocupan una superficie lacustre $A(d) = 2(1{,}5)^d$ en metros cuadrados. Pronostique el área ocupada tras 2 días.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluaremos para un tiempo exacto de $d =$ _____. 2. Reemplaza: $A(2) = 2(1{,}5)^{\_\_\_\_} = 2(\_\_\_\_\_)$. 3. Superficie final será _____ metros cuadrados.

Problema 2. Un activo virtual depreciativo reduce su valor nominal según $V(t) = 400(0{,}8)^t$ en dólares. Evalúe el valor financiero base al lanzarse ($t = 0$).

Guía de Solución Interactiva

1. El momento de lanzamiento equivale a $t =$ _____. 2. Operando en la fórmula: $V(0) = 400(0{,}8)^{\_\_\_\_}$. 3. Recordando la regla de exponentes nulos, inicia en _____ dólares.

Problema 3. Un clip viral acumula compartidas proyectadas por $C(h) = 50e^{0{,}4h}$. Precise matemáticamente cuántas interacciones registró en la hora cero inicial.

Guía de Solución Interactiva

1. El tiempo origen dicta evaluar para $h =$ _____. 2. Al sustituir logramos $C(0) = 50e^{\_\_\_\_}$. 3. El impacto base inicial constaba de exactamente _____ compartidas.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La presión atmosférica decae exponencialmente al ascender montañas mediante $P(h) = 101e^{-0{,}12h}$ en kilopascales. Informe la lectura barométrica detectada al nivel del mar base.

Problema 5. Una taza de infusión hervida se atempera según $T(m) = 22 + 78e^{-0,05m}$ en grados. Identifique la barrera térmica ambiente inquebrantable a largo plazo.

Problema 6. El reactivo químico residual se degrada trazando $R(s) = 500(2)^{-s/3}$ gramos. Descifre la masa no consumida sobreviviente exactos tres segundos post mezcla sintética.

Problema 7. Cierta moneda nacional sufre inflación indetenible modelada por $I(a) = 10e^{0,08a}$ en porcentaje. Deduzca el impacto porcentual devaluativo al arrancar el estudio temporal.

Problema 8. El margen de retención memorística estudiantil disminuye reflejando $M(d) = 85e^{-0,2d}+15$ por ciento. Indique el límite de conocimientos residualmente estancados en el alumno.

Problema 9. La intensidad lumínica oceánica se extingue bajando metros bajo $L(p) = 1000(0,5)^{p/10}$ lux. Calcule la luz filtrada detectada exactamente veinte metros debajo del oleaje.

Problema 10. Cierta espuma insonorizadora ahoga decibelios de fábrica mediante $R(x) = 120e^{-0,3x}$, siendo x centímetros de grosor. Formule el nivel sónico sin instalación protectora.

Problema 11. Un municipio rural sufre éxodo poblacional $P(a) = 8000(0,9)^{a}$ habitantes por año. Anticipe estadísticamente el censo local restante tras apenas doce meses transcurridos.

Problema 12. La granja cunícula prolifera rápidamente sus madrigueras $N(m) = 10 \cdot 4^{m/2}$. Indique el número absoluto de ejemplares al culminar el cuarto mes reproductivo.

Problema 13. Un deportivo lujoso evapora tasación de concesionario trazando $V(a) = 90000e^{-0,15a}$ dólares. Especifique el valor etiqueta original cobrado antes de rodar motores.

Problema 14. Las celdas de iones drena amperaje usando modelo constante $E(h) = 100(1 - e^{-0,2h})$. Determine la carga de energía porcentual con tiempo prolongado al infinito.

Problema 15. El fármaco en torrente hepático procesa miligramos $D(h) = 400(0{,}25)^{h/4}$. Estime analíticamente el medicamento sin metabolizar presentes exactos cuatro horas después de ingerirse.

Problema 16. Una difamación escandalosa infecta redes midiendo $R(h) = \frac{1000}{1+9e^{-h}}$ cuentas creyentes. Averigüe el techo asintótico inalcanzable de usuarios engañados totalmente.

Problema 17. El ruteador corporativo suma terminales enlanzadas $N(m) = 5(3)^{m/6}$ unidades. Descifre la cantidad base conectada al inicio perimetral del conteo informático sistémico.

Problema 18. La vibración sísmica estructural mengua oscilaciones con $V(s) =$

$50e^{-0,8s}$ milímetros. Determine el tope máximo desestabilizador justo al instante del impacto tectónico.

Problema 19. Un isótopo inestable de polonio evapora su existencia marcando $W(d) = 60(0{,}5)^{d/138}$ gramos. Precise la mitad restante temporal a los 138 días exactos.

Problema 20. Los folículos biológicos asimilan terapia capilar bajo $F(s) = 300e^{0{,}1s} + 200$. Informe el conteo basal original evaluado capilarmente antes de iniciar el tratamiento.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. Dom: $\mathbb{R}$, A.H.: $y = 3$, Ran: $(3, \infty)$.
2. $x = 3$.
3. Intercepto Y: $(0, 4)$.
4. $x = 1$.
5. A.H.: $y = 7$, Ran: $(-\infty, 7)$.
6. $P(0) = 1000$.
7. $x = \pm 2$.
8. Dom: $\mathbb{R}$, Ran: $(-4, \infty)$.
9. Base $a = 1/4$.
10. $x = 3$.
11. Intercepto Y: $(0, -2)$.
12. $x = 2$ (la raíz $2^x = -1$ rechazada).
13. $x < -3$.
14. $x = 4$, intersectan en $(4, 81)$.
15. Rango: $[0, \infty)$.
16. $x = 3$, $y = 1$.
17. $f(\ln 3) = 9$.
18. $x \in [-3, 0]$.
19. $f(x) = 2e^{3x}$.
20. $x = \pm 2$.

Propuestos de Aplicación

1. 4,5 metros cuadrados.
2. 400 dólares nominales.
3. 50 compartidas base.
4. 101 kilopascales.
5. 22 grados centígrados.
6. 250 gramos sobrevivientes.
7. 10 % devaluativo.
8. 15 % residual inquebrantable.
9. 250 lux oceánicos.
10. 120 decibelios directos.
11. 7200 censados locales.
12. 160 ejemplares totales.
13. 90000 dólares etiqueta.
14. 100 % porcentaje energético absoluto.
15. 100 miligramos íntegros.
16. 1000 cuentas asintóticas.
17. 5 terminales iniciales.
18. 50 milímetros máximos.
19. 30 gramos isótopicos.
20. 500 folículos originales.

¡Llegaste al Final!

'Tu potencial de aprendizaje no es lineal, es exponencial. El esfuerzo de hoy parece pequeño, pero con el tiempo, acumula una fuerza indetenible que rompe cualquier barrera.'

- El poder del Crecimiento Continuo

¡Felicidades! Has dominado la esencia del número e y el comportamiento de las curvas que gobiernan el universo, desde la economía hasta la propia naturaleza.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com