PRECÁLCULO

FUNCIONES A TROZOS

CUADERNO DE TRABAJO

Evaluación, Dominio y Trazado de Gráficas

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Funciones Definidas a Trozos

En el mundo real, no todos los fenómenos se comportan bajo una única regla matemática desde el inicio hasta el fin. Las tarifas de impuestos, las facturas eléctricas o el movimiento con aceleración variable requieren modelos que cambian sus reglas dependiendo del valor de entrada.

1. Definición Formal

Una **función definida a trozos** (o por partes) es aquella cuya regla de correspondencia cambia dependiendo del valor de la variable independiente x. Se expresa agrupando las subfunciones con una llave:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Regla 1} & \text{si Condición 1 (Subdominio 1)} \\ \text{Regla 2} & \text{si Condición 2 (Subdominio 2)} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Para evaluar $f(a)$, **primero** identificamos en qué subdominio se encuentra el valor a, y **segundo**, evaluamos únicamente en la regla correspondiente a ese subdominio.

PROFE TEO

Piensa en una función a trozos como una máquina que primero revisa tu ÏD"(el valor de x) y, según la condición que cumplas, te manda a una cinta transportadora distinta (la fórmula) para calcular tu salida (y).

2. Dominio y Rango

- **Dominio total:** Es la unión de todos los subdominios individuales. $\text{Dom}(f) = \text{Dom}_1 \cup \text{Dom}_2 \cup \dots$
- **Precaución de Unicidad:** Los subdominios **nunca** deben superponerse. Si un valor de x cumpliera dos condiciones simultáneamente, la relación dejaría de ser una función (fallaría la prueba de la línea vertical).

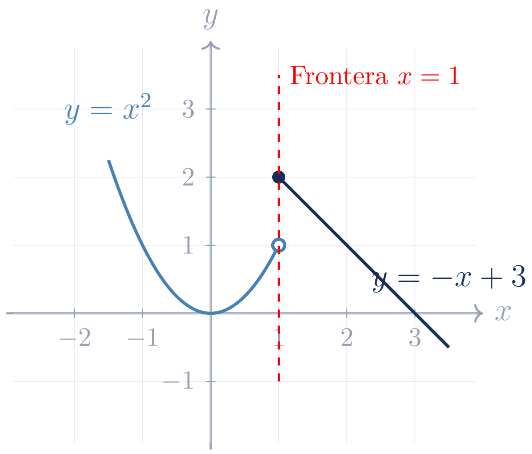
PROFE TEO

¡El valor absoluto es la función a trozos más famosa! $|x| = x$ si $x \geq 0$, y $|x| = -x$ si $x < 0$. ¡Recuérdalo siempre!

3. Trazado de Gráficas y Extremos

Al graficar, trazamos cada subfunción como si fuera independiente, pero luego "borramos"la parte que no corresponde a su condición.

- **Puntos Cerrados (•):** Se usan en los extremos si la desigualdad incluye el signo igual ($\leq, \geq$). Indican que el punto *sí* pertenece a la gráfica.
- **Puntos Abiertos (∘):** Se usan si la desigualdad es estricta ($<, >$). Indican que el punto es un límite al que la gráfica se acerca infinitamente, pero *no* lo toca.



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Evaluación Básica

Enunciado: Sea $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Calcule $f(-3) + f(4)$.

Solución: Para $x = -3$, usamos la primera regla ($-3 < 0$): $f(-3) = 2(-3) + 1 = -5$.
Para $x = 4$, usamos la segunda regla ($4 \geq 0$): $f(4) = (4)^2 = 16$.
Suma total: $-5 + 16 = 11$.

PROFE TEO
Un error fatal es evaluar el mismo número en ambas ramas y sumar los resultados. ¡Nunca hagas eso! El número solo puede entrar por una sola puerta.

Problema Resuelto 2: Dominio de la Función

Enunciado: Determine el dominio de $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Solución: Subdominio 1: $x \leq -1$. La restricción $x \neq 0$ no afecta aquí porque 0 no está en $(-\infty, -1]$.
Subdominio 2: $x > 2$. La restricción $x \geq 0$ se cumple para todo $(2, +\infty)$.
Unimos los subdominios: $\text{Dom}(g) = (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$. Hay un vacío entre -1 y 2.

Problema Resuelto 3: Continuidad Visual (Unión de Tramos)

Enunciado: Halle el valor de la constante k para que los trozos de la función $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 3 \\ kx-1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ se conecten en $x = 3$.

Solución: El extremo del primer trozo se acerca a: $y = (3) + 2 = 5$.
El inicio del segundo trozo es: $y = k(3) - 1$.
Para que se conecten, igualamos las alturas en la frontera: $3k - 1 = 5 \implies 3k = 6 \implies k = 2$.

Problema Resuelto 4: Reescribir Valor Absoluto

Enunciado: Exprese la función $f(x) = |2x-8|-3$ como una función a trozos.
Solución: El punto crítico o frontera es cuando $2x - 8 = 0 \implies x = 4$.
Si $x \geq 4$, el interior es positivo: $f(x) = (2x - 8) - 3 = 2x - 11$.
Si $x < 4$, el interior es negativo: $f(x) = -(2x-8)-3 = -2x+8-3 = -2x+5$.
Por lo tanto: $f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 11 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$.

Problema Resuelto 5: Trazado Mental (Puntos Críticos)

Enunciado: Indique los vértices y puntos abiertos/cerrados críticos para graficar $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } 1 < x < 4 \end{cases}$.
Solución: Tramo 1: Es una línea horizontal. Termina en un **punto cerrado** en $(1, -2)$.
Tramo 2: Es una parábola desplazada. Inicia en un **punto abierto** en $(1, 1^2 - 3) = (1, -2)$. Termina en un **punto abierto** en $(4, 4^2 - 3) = (4, 13)$.
Como el punto abierto y cerrado en $x = 1$ coinciden en altura (-2), la gráfica es continua allí.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Tarifas de Telecomunicaciones

Contexto: Un plan móvil cobra \$20 fijos por los primeros 5 GB y \$3 adicionales por cada GB extra. Formule la función de costo $C(x)$ para x GB consumidos.
Solución: Si $x \leq 5$, el costo es constante: $C(x) = 20$.
Si $x > 5$, se paga el fijo más \$3 por el exceso $(x - 5)$: $C(x) = 20 + 3(x - 5) = 3x + 5$.
Respuesta: $C(x) = \begin{cases} 20 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 3x + 5 & \text{si } x > 5 \end{cases}.$

Aplicación 2: Costos de Estacionamiento

Contexto: Un garaje cobra \$5 la primera hora o fracción, y \$2 adicionales por cada hora extra hasta un máximo de \$15 diarios. Modele el costo hasta 6 horas.
Solución: Primera hora: $C(h) = 5$ si $0 < h \leq 1$.
Horas adicionales limitadas a 15: Tope ocurre tras 5 horas.
Respuesta: $C(h) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 < h \leq 1 \\ 5 + 2(h - 1) & \text{si } 1 < h \leq 6 \\ 15 & \text{si } h > 6 \end{cases}.$

Aplicación 3: Escala Impositiva

Contexto: Un sistema grava con 0 % los primeros \$10, 000 de ingresos y 10 % cualquier ingreso que exceda esta cifra. Modele el impuesto $T(x)$ para un ingreso $x \geq 0$.
Solución: Tramo base: $T(x) = 0$ si $0 \leq x \leq 10000$.
Tramo superior: El impuesto aplica solo al exceso $(x - 10000)$. $T(x) = 0{,}10(x - 10000)$.
Respuesta: $T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 10000 \\ 0{,}1x - 1000 & \text{si } x > 10000 \end{cases}.$

PROFE TEO
Los impuestos escalonados son el mejor ejemplo de la vida real. Si pasas de nivel, la nueva tasa se aplica **solo** al dinero que sobrepasa el límite, no a todo tu sueldo.

Aplicación 4: Cinemática de Vehículos

Contexto: Un automóvil acelera a 2 m/s^2 durante 10 segundos y luego mantiene velocidad constante. Construya la función de velocidad $v(t)$.
Solución: Fase de aceleración $(0 \leq t \leq 10)$: $v(t) = 2t$.
En $t = 10$, la velocidad alcanza $v(10) = 20$ m/s.
Fase constante $(t > 10)$: Se mantiene a 20 m/s.
Respuesta: $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 20 & \text{si } t > 10 \end{cases}.$

Aplicación 5: Dosificación Médica

Contexto: Una medicina requiere 5 mg para pacientes menores de 12 años y una dosis calculada por $\frac{\text{peso}}{4}$ mg para pacientes de 12 años a más. Formule la regla.

Solución: Usamos la edad E como límite y P como peso. Asumiendo la función en base a la edad E.

Respuesta: $\text{Dosis}(E) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 \leq E < 12 \\ P/4 & \text{si } E \geq 12 \end{cases}$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos lógicos o visuales.

1. Si en una función a trozos dos condiciones se superponen (ej. $x \leq 2$ y $x \geq 2$) y devuelven valores y distintos, explique analíticamente por qué la relación colapsa y deja de ser función.
2. Al graficar, ¿por qué es crucial dibujar un círculo abierto ($\circ$) en un extremo excluido en lugar de simplemente "terminar la línea un poquito antes¿
3. Deduzca por qué la función escalón unitario (Heaviside), definida como 0 para $x < 0$ y 1 para $x \geq 0$, no tiene un punto de conexión en $x = 0$.
4. ¿Es posible que una función a trozos compuesta exclusivamente por segmentos rectos no tenga dominio en todos los números reales? De un ejemplo.
5. Explique algebraicamente por qué el valor absoluto $|x - 5|$ invierte el signo de la expresión interior únicamente cuando evaluamos valores de $x < 5$.
6. Si una función a trozos tiene la misma regla en todos sus subdominios (ej. x^2 para $x < 1$ y x^2 para $x \geq 1$), ¿sigue considerándose a trozos en términos prácticos?
7. En un problema de impuestos escalonados, argumente por qué es un error común multiplicar el porcentaje total por el sueldo total si se excede un umbral.
8. Geométricamente, si los límites de los trozos son $x = a$ y $x = b$, ¿qué representan las líneas verticales discontinuas en esas coordenadas al graficar?
9. Demuestre que si cambiamos el dominio de $x < 2$ a $x \leq 2$ en el trozo izquierdo, y $x \geq 2$ a $x > 2$ en el derecho, el trazado de una función continua no se altera en absoluto.
10. Reflexione: Si la naturaleza es fluida, ¿por qué los ingenieros insisten en modelar el desgaste de materiales usando ecuaciones definidas a trozos abruptos?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Evalúe $f(2)$ y $f(-4)$ para $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Para $x = 2$, la condición válida es x_____0. Usamos la regla __________.
$f(2) = (\_\_\_\_\_)^2 + 5 =$ _____.

2. Para $x = -4$, la condición válida es x_____0. Usamos la regla __________.
$f(-4) = 3(\_\_\_\_\_) - 1 =$ _____.

Problema 2. Halle el valor c para que los trozos se conecten en $x = 1$: $g(x) = \begin{cases} 4x+c & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Altura del extremo izquierdo en frontera $x = 1$: $4(\_\_\_\_\_) + c =$ __________.
2. Altura del extremo derecho en frontera $x = 1$: $3(\_\_\_\_\_)^2 =$ _____.
3. Iguala para conectar: __________ = _____ $\implies$ $c =$ _____.

Problema 3. Reescriba la función $h(x) = |x+3|$ como a trozos.

Guía de Solución Interactiva

1. Encuentra la frontera igualando el interior a cero: $x + 3 = 0 \implies x =$ _____.
2. Tramo positivo ($x \geq$ _____): El interior no cambia. Regla: __________.
3. Tramo negativo ($x <$ _____): Se invierte el signo. Regla: $-(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) =$ __________.

PROFE TEO
Al buscar el dominio total, lee las desigualdades como si fueran intervalos en la recta numérica. Dibuja una línea y pinta las zonas. Lo que quede pintado es tu dominio.

Problemas Generales

Problema 4. Sea $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Halle $f(-5) + f(0) + f(10)$.

Problema 5. Determine el dominio de $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

Problema 6. Halle k para que conecten en $x = -2$: $h(x) = \begin{cases} x^2 - k & \text{si } x \leq -2 \\ 5x + 10 & \text{si } x > -2 \end{cases}$.

Problema 7. Reescriba $f(x) = |2x-1|+4$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

Problema 8. Resuelva la ecuación $\begin{cases} 2x & \text{si } x < 3 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = 8$.

Problema 9. Indique las coordenadas de los puntos de quiebre de la función $y = |x-4| + |x|$.

Problema 10. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Calcule la diferencia entre $f(2)$ y el valor esperado por la curva en $x = 2$.

Problema 11. Determine el rango de $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Problema 12. Reescriba como función a trozos $g(x) = \frac{|x|}{x}$ (Función Signo no nula).

Problema 13. Halle constantes a y b para que $f(x) = \begin{cases} ax & x < 1 \\ 3 & 1 \leq x \leq 2 \\ bx^2 + 1 & x > 2 \end{cases}$ sea continua en todos sus empalmes.

Problema 14. Halle el dominio de $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Problema 15. Resuelva la desigualdad $f(x) < 5$ si $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Problema 16. Trace la gráfica y halle los interceptos de $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \end{cases}$.

Problema 17. Exprese a trozos el área de un cuadrado cuyo lado x se expande a razón de 1 unidad/s, pero topa con un muro a $x = 5$.

Problema 18. Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Calcule la Tasa de Cambio Promedio en el intervalo $[0, 2]$.

Problema 19. Construya una función a trozos continua que consista en dos rectas y un vértice de valor absoluto invertido en $x = 0$, $y = 4$.

Problema 20. Halle el dominio y rango de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Una tienda cobra \$5 de envío por compras menores a \$50. Compras mayores o iguales a \$50 tienen envío gratis. Modele el costo de envío $E(x)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Defina la variable independiente x: Total de la __________. 2. Primera condición: Si $x < 50$, $E(x) =$ _____. 3. Segunda condición: Si $x \geq 50$, $E(x) =$ _____.
4. Arme la llave: $E(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_ & x < \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & x \geq \_\_\_\_\_ \end{cases}$.

Problema 2. El agua de un estanque se vacía a 2 L/min durante 10 min, y luego la llave se cierra. Modele la tasa de salida $V(t)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Durante los primeros 10 min ($0 \leq t \leq 10$), la tasa es _____ L/min. 2. Después de los 10 min ($t > 10$), la tasa es _____ L/min. 3. Escriba: $V(t) = \begin{cases} \_\_\_\_\_ & 0 \leq t \leq \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & t > \_\_\_\_\_ \end{cases}$.

Problema 3. Alquilar una bicicleta cuesta \$10 fijos más \$2 por kilómetro recorrido. A partir de 20 km, la tarifa adicional por km se reduce a \$1.

Guía de Solución Interactiva

1. Tramo base ($0 \leq k \leq 20$): Costo $= 10 +$ _____k. 2. Costo exacto al recorrer 20 km: $10 + 2(20) =$ _____. 3. Tramo excedente ($k > 20$): Costo $=$ _____ $+ 1(k -$ _____$)$.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un horno calienta a 10°C por minuto hasta alcanzar 200°C, y luego mantiene esa temperatura estable. Exprese la temperatura T respecto al tiempo t.

Problema 5. Una red de internet da 100 Mbps de velocidad. Si el usuario consume más de 50 GB en el mes, la velocidad baja a 10 Mbps. Modele la velocidad $V(g)$.

Problema 6. Las entradas a un museo cuestan \$0 para menores de 12 años, \$10 para adultos hasta 65 años, y \$5 para mayores de 65. Construya la tarifa $C(e)$.

Problema 7. Un submarino desciende a 5 m/s durante 40 segundos, permanece a esa profundidad 20 segundos, y asciende a 4 m/s. Modele su profundidad $P(t)$.

Problema 8. El salario base es \$1000. Por cada venta v hasta 50, se gana \$10. Por cada venta adicional sobre 50, se comisiona \$15. Formule el sueldo $S(v)$.

Problema 9. Una autopista cobra un peaje de \$2 para motos, \$4 para autos convencionales y \$4 más \$1 por eje extra para vehículos pesados ($>$ 2 ejes). Modele $P(\text{ejes})$.

Problema 10. La dosis de un anestésico es 2 mg/kg para pacientes de hasta 50 kg. Si pesan más, reciben 100 mg fijos más 1 mg por kg extra.

Problema 11. La velocidad del viento sube linealmente de 0 a 80 km/h en 2 horas. Mantiene la intensidad 3 horas y cae a 0 abruptamente. Modele $V(t)$.

Problema 12. Un dron sube a 3 m/s. Al alcanzar 30 metros se detiene, toma fotos por 10 segundos, y desciende al doble de velocidad inicial. Exprese su altura.

Problema 13. La factura eléctrica cuesta \$0,15/kWh por los primeros 200 kWh. El consumo excedente se penaliza a \$0,25/kWh. Si la factura es \$40, ¿cuál fue el consumo?

Problema 14. Imprimir folletos cuesta \$50 por diseño inicial, más \$0,10 por unidad. Pasando las 1000 unidades, el precio unitario general cae retroactivamente a \$0,08. Modele la función costo.

Problema 15. Una suscripción anual de streaming cuesta \$120. Si el cliente cancela antes de los 6 meses, se aplica penalidad de \$30 al prorrateo. Modele el monto a devolver $D(m)$.

Problema 16. Una plataforma de taxis aplica tarifa dinámica. Precio base \$5. Si la demanda x sobrepasa 100 usuarios, el precio base salta abruptamente a \$12. Exprese la tarifa.

Problema 17. Un gimnasio cobra \$30/mes. Quien asista menos de 5 veces paga tarifa completa. Si asiste de 5 a 15 veces, descuentan \$5. Más de 15 asistencias, descuentan \$10.

Problema 18. La reacción de un químico aumenta su masa térmica t^2 gramos/s hasta los 5 segundos. Después, se estabiliza decreciendo a ritmo -2 g/s. Formule la masa $M(t)$.

Problema 19. Un termostato inteligente mantiene un edificio a 24°C de 8am a 6pm, y lo deja caer a 18°C el resto de la noche. Modele la temperatura según la hora h.

Problema 20. En una fábrica, la cinta avanza a 1 m/s, se detiene por 5 segundos para estampar, y avanza a 2 m/s hasta terminar. Formule la posición de la caja $P(t)$.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $f(2) = 9$; $f(-4) = -13$.
2. $c = -1$.
3. $x \geq -3 : x + 3$; $x < -3 : -x - 3$.
4. $-2 + 0 + 2 = 0$.
5. $(-\infty, -3) \cup (-3, -1] \cup (3, \infty)$.
6. $k = 4$.
7. $2x+3$ si $x \geq 0{,}5$; $-2x+5$ si $x < 0{,}5$.
8. $x = 13$ (la rama 1 da 4, fuera de dom).
9. $(0, 4)$ y $(4, 4)$.
10. Límite 4, valor 7. Dif $= 3$.
11. $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.
12. 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$.
13. $a = 3$, $b = 1/2$.
14. $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.
15. Rango: $(-3, 5/2)$.
16. Corte y: $(0, -1)$.
17. x^2 si $t \leq 5$; 25 si $t > 5$.
18. $(0{,}5 - 0)/(2 - 0) = 1/4$.
19. $4 - |x|$
20. Dominio $\mathbb{R}$, Rango $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Propuestos de Aplicación

1. 5 si $x < 50$; 0 si $x \geq 50$.
2. 2 si $0 \leq t \leq 10$; 0 si $t > 10$.
3. Costo 20 km $= 50$. Luego $50+1(k-20)$.
4. $10t$ si $t \leq 20$; 200 si $t > 20$.
5. 100 si $g \leq 50$; 10 si $g > 50$.
6. 0 si $e < 12$; 10 si $12 \leq e \leq 65$; 5 si $e > 65$.
7. $5t$ $(0 - 40)$; 200 $(40 - 60)$; $200 - 4(t - 60)$.
8. $1000 + 10v$ $(v \leq 50)$; $1500 + 15(v - 50)$.
9. 2 (motos); 4 $(e = 2)$; $4 + 1(e - 2)$ $(e > 2)$.
10. $2k$ si $k \leq 50$; $100 + 1(k - 50)$.
11. $40t$ $(0 - 2)$; 80 $(2 - 5)$; 0 $(t > 5)$.
12. $3t$ $(0 - 10)$; 30 $(10 - 20)$; $30 - 6(t - 20)$.
13. 240 kWh.
14. $50 + 0{,}1x$ $(x \leq 1000)$; $50 + 0{,}08x$.
15. $120 - 10m - 30$ $(m < 6)$; $120 - 10m$.
16. 5 si $x \leq 100$; 12 si $x > 100$.
17. 30 $(a < 5)$; 25 $(5 - 15)$; 20 $(a > 15)$.
18. t^2 $(t \leq 5)$; $25 - 2(t - 5)$ $(t > 5)$.
19. 24 $(8 \leq h \leq 18)$; 18 (resto).
20. t $(0 - 1)$; 1 $(1 - 6)$; $1 + 2(t - 6)$.

¡Llegaste al Final!

'La vida real rara vez sigue una sola línea recta. Aprender a conectar los diferentes trozos de nuestra realidad es la verdadera habilidad de un genio.'

- La belleza del análisis

¡Felicidades! Has dominado el arte de las reglas cambiantes. Ya estás listo para modelar tarifas, impuestos, saltos y fronteras en el infinito mundo de las matemáticas.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com