PRECÁLCULO

FUNCIONES CUADRÁTICAS

CUADERNO DE TRABAJO

Forma Estándar, Vértice y Optimización

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Poder del Vértice

La forma general de una función cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ es útil, pero oculta la información más importante de la parábola. Para dominar el análisis gráfico y la optimización, utilizamos la **forma estándar** (o canónica), que expone el vértice a simple vista.

1. La Forma Estándar

Toda función cuadrática puede reescribirse, completando cuadrados, en la forma:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

Donde $a \neq 0$. Las constantes h y k son las coordenadas del vértice.

PROFE TEO

¡Ojo! El signo de h en la fórmula engaña. Si ves $(x-3)^2$, h es 3 positivo. Si ves $(x+5)^2$, h es -5. La ecuación original lleva un menos de fábrica.

2. Elementos Geométricos

A partir de la forma estándar $f(x) = a(x-h)^2 + k$, extraemos:

- **Vértice:** Es el punto crítico de la parábola, ubicado en $V(h,k)$.
- **Eje de Simetría:** Es la línea vertical que divide a la parábola en dos mitades perfectas, su ecuación es $x = h$.

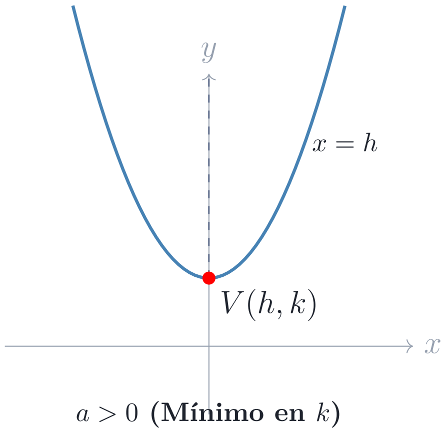
3. Optimización (Máximos y Mínimos)

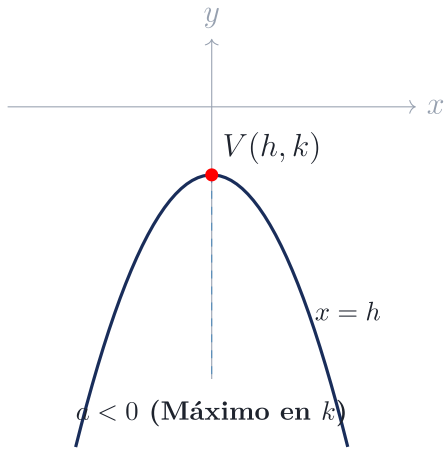
El vértice representa el valor óptimo de la función (el pico o el fondo).

- Si $\boldsymbol{a > 0}$: La función se abre hacia arriba. El valor **mínimo** es k, y ocurre cuando $x = h$.
- Si $\boldsymbol{a < 0}$: La función se abre hacia abajo. El valor **máximo** es k, y ocurre cuando $x = h$.

PROFE TEO

El parámetro a es el capitán del barco. Si es positivo ($a > 0$), la parábola "sonríe" tiene un mínimo. Si es negativo ($a < 0$), la parábola está "triste" tiene un máximo.





Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Extracción Básica

Enunciado: Determine el vértice, eje de simetría y valor extremo de $f(x) = -3(x+5)^2 + 12$.
Solución: Comparando con $a(x-h)^2 + k$: $a = -3$, $h = -5$, $k = 12$.
Vértice: $V(-5, 12)$.
Eje de Simetría: $x = -5$.
Como $a < 0$, abre hacia abajo. El valor extremo es un **máximo** de 12.

Problema Resuelto 2: Completar el Cuadrado

Enunciado: Reescriba $f(x) = x^2 - 8x + 21$ a su forma estándar.
Solución: Agrupamos términos con x: $f(x) = (x^2 - 8x) + 21$.
Tomamos la mitad de -8 (que es -4) y la elevamos al cuadrado (16).
Sumamos y restamos 16 dentro del grupo: $f(x) = (x^2 - 8x + 16 - 16) + 21$.
Extraemos el -16: $f(x) = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 21$.
Factorizamos el trinomio: $f(x) = (x-4)^2 + 5$.

Problema Resuelto 3: Completar con Coeficiente $a \neq 1$

Enunciado: Lleve a forma estándar la función $g(x) = -2x^2 - 12x - 10$.
Solución: Factorizamos el -2 de los términos con x: $g(x) = -2(x^2+6x)-10$.
Completamos cuadrado: mitad de 6 es 3, al cuadrado es 9.
$g(x) = -2(x^2 + 6x + 9 - 9) - 10$.
El -9 sale multiplicado por -2: $g(x) = -2(x + 3)^2 + 18 - 10$.
Forma Estándar: $g(x) = -2(x + 3)^2 + 8$.

PROFE TEO

Si el coeficiente de x^2 no es 1, ¡factorízalo primero! Para $2x^2 + 12x$, extrae el 2: $2(x^2 + 6x)$. Luego completa el cuadrado adentro.

Problema Resuelto 4: Hallar la Ecuación desde el Vértice

Enunciado: Encuentre la función cuadrática en forma estándar cuyo vértice es $(3, -2)$ y pasa por el punto $(5, 6)$.
Solución: Usamos $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Sustituimos el vértice: $f(x) = a(x - 3)^2 - 2$.
Evaluamos el punto $(5, 6)$: $6 = a(5 - 3)^2 - 2$.
$6 = a(2)^2 - 2 \implies 6 = 4a - 2 \implies 8 = 4a \implies a = 2$.
Función: $f(x) = 2(x - 3)^2 - 2$.

Problema Resuelto 5: Interceptos con Ejes

Enunciado: Halle los interceptos de $f(x) = -(x - 4)^2 + 9$.
Solución: Intercepto Y ($x = 0$): $f(0) = -(0-4)^2+9 = -16+9 = -7$. Punto: $(0, -7)$.
Interceptos X ($f(x) = 0$): $0 = -(x - 4)^2 + 9 \implies (x - 4)^2 = 9$.
Extraemos raíz: $x - 4 = \pm 3$.
$x = 4 \pm 3 \implies x_1 = 7, x_2 = 1$. Puntos: $(1, 0)$ y $(7, 0)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Proyectiles

Contexto: Un cañón lanza un proyectil. Su altura en metros tras t segundos es $h(t) = -5(t-4)^2 + 100$. Halle la altura máxima y el tiempo exacto para alcanzarla.
Solución: La función ya está en forma estándar con $a = -5$ (abre hacia abajo, tiene máximo). El vértice es $(h, k) = (4, 100)$.
Respuesta: Alcanza una altura máxima de 100 metros a los 4 segundos.

Aplicación 2: Maximización de Ingresos

Contexto: Una fábrica estima su ganancia diaria en dólares mediante $G(x) = -2(x-50)^2 + 8000$, donde x representa unidades producidas. Determine la producción óptima y la ganancia máxima obtenible.
Solución: Identificamos el vértice de la ecuación canónica: $V(50, 8000)$.
Respuesta: La producción óptima es fabricar 50 unidades, logrando así una ganancia máxima de $8000 diarios.

Aplicación 3: Optimización Agrícola

Contexto: Un granjero cerca un corral rectangular aprovechando un muro existente. El área modelada en función del ancho x resulta ser $A(x) = -2(x-10)^2 + 200$. Halle el área máxima.
Solución: La parábola de área tiene coeficiente $a = -2$ y vértice en $(10, 200)$. El valor de k determina el tope máximo.
Respuesta: El área máxima posible del corral es 200 unidades cuadradas.

Aplicación 4: Arquitectura Estructural

Contexto: Un arco parabólico decorativo tiene una altura desde el suelo dada por $y = -0{,}5(x-6)^2 + 18$, midiendo x en metros desde un pilar lateral. Calcule su altura máxima.
Solución: De la forma estándar, el vértice se ubica en $x = 6$ con una coordenada vertical $k = 18$.
Respuesta: La altura máxima en la cúspide del arco decorativo es 18 metros.

PROFE TEO
En problemas de física, el eje X suele ser tiempo o distancia horizontal, y el eje Y la altura. El vértice (h, k) te da ambos datos: CUÁNDO (h) y CUÁNTO (k).

Aplicación 5: Rendimiento Energético

Contexto: Un panel solar genera energía modelada por $E(t) = -3(t-12)^2 + 400$ vatios, siendo t la hora del día en formato 24h. ¿A qué hora exacta produce máxima eficiencia?
Solución: El vértice de la curva energética es $(12, 400)$. El tiempo t que maximiza la función es el valor de h.
Respuesta: La máxima eficiencia energética ocurre exactamente a las $12:00$ horas.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico.

1. Si en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, el valor de a aumenta de 2 a 10, ¿cómo cambia visualmente la gráfica de la parábola?

2. Explique por qué el parámetro k representa la coordenada z"del vértice. ¿Qué ocurre con el término al cuadrado cuando $x = h$?

3. Una función cuadrática tiene $a < 0$ y $k < 0$. Sin graficar, ¿es posible que tenga raíces reales (interceptos con el eje X)? Justifique.

4. ¿Por qué el eje de simetría siempre es $x = h$ y no $y = k$?

5. Al completar el cuadrado de $x^2 + 10x$, sumamos 25. ¿De dónde proviene este número y por qué garantiza formar un binomio al cuadrado perfecto?

6. Si el vértice de una parábola es $(4, 7)$ y la gráfica pasa por $(2, 11)$, ¿el valor de a debe ser positivo o negativo? Argumente geométricamente.

7. Si una función se modela como $f(x) = 5(x+2)^2 - 1$, identifique el error de un estudiante que afirma que el mínimo ocurre en $x = 2$.

8. ¿Qué sucede con el vértice de $f(x) = (x-h)^2 + k$ si eliminamos el término cuadrático y solo queda $f(x) = k$? ¿Sigue siendo una parábola?

9. En un contexto de costos, la función es $C(x) = 0{,}5(x-100)^2 + 5000$. ¿Por qué producir más de 100 unidades empeora la situación financiera?

10. Geométricamente, si el vértice está en el origen $(0, 0)$, ¿cómo se simplifica la ecuación de la forma estándar?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Extraiga el vértice y el eje de simetría de $y = 3(x-7)^2 + 4$.

Guía de Solución Interactiva

1. El formato es $a(x-h)^2 + k$. Identificamos h cambiando el signo interno: $h =$ ____.
2. Identificamos k conservando el signo exterior: $k =$ ____.
3. Vértice: $V($____, ____$)$. Eje de simetría: $x =$ ____.

Problema 2. Transforme $f(x) = x^2 + 6x + 10$ a forma estándar.

Guía de Solución Interactiva

1. Agrupa los términos de x. Mitad de 6 es ____, y al cuadrado es ____.
2. Suma y resta ese valor: $(x^2 + 6x +$ ____ $-$ ____$) + 10$.
3. Factoriza el trinomio y simplifica afuera: $f(x) = (x +$ ____$)^2 +$ ____.

Problema 3. Halle a si el vértice es $(1, 2)$ y pasa por el punto $(2, 5)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Plantilla con vértice: $y = a(x -$ ____$)^2 +$ ____.
2. Sustituye el punto $x = 2, y = 5$: ____ $= a($____ $- 1)^2 + 2$.
3. Resuelve: $5 = a($____$)^2 + 2 \implies a =$ ____.

PROFE TEO

Para hallar 'a' conociendo el vértice y un punto extra, no inventes números. Reemplaza las coordenadas x e y del punto en la ecuación y despeja 'a' como una simple ecuación lineal.

Problemas Generales

Problema 4. Determine el vértice de $f(x) = -4(x+9)^2 - 15$.

Problema 5. Convierta $g(x) = x^2 - 10x + 30$ a su forma estándar.

Problema 6. Halle el eje de simetría y valor máximo de $y = -2(x-6)^2 + 18$.

Problema 7. Halle la forma estándar si $V(-2, 4)$ y pasa por $(0, 12)$.

Problema 8. Convierta $h(x) = 2x^2 + 16x + 25$ a forma canónica.

Problema 9. Encuentre los interceptos con el eje X de $y = (x-5)^2 - 16$.

Problema 10. Exprese $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ en forma estándar y halle su vértice.

Problema 11. Halle c si $f(x) = 3(x-2)^2 + c$ tiene un valor mínimo de -8.

Problema 12. Determine la ecuación cuadrática estándar cuyo vértice es el origen y pasa por $(3, -27)$.

Problema 13. Convierta $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$ a forma estándar.

Problema 14. Halle las raíces reales de $f(x) = -2(x+1)^2 + 50$.

Problema 15. Verifique si el punto $(4, -1)$ pertenece a $y = -3(x-2)^2 + 11$.

Problema 16. Transforme $p(x) = -3x^2 - 18x - 20$ e identifique su máximo.

Problema 17. Deduzca la forma estándar de la parábola con interceptos en $(2, 0)$ y $(8, 0)$, y $a = 1$.

Problema 18. Si $f(x) = a(x-h)^2 + k$, halle h si el eje de simetría equidista de las raíces $x = -4$ y $x = 10$.

Problema 19. Convierta $y = -0{,}1x^2 + 2x - 5$ a la forma del vértice.

Problema 20. Halle el dominio y rango de $g(x) = 4(x-3)^2 - 7$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un clavadista salta con trayectoria $h(x) = -2(x-1)^2 + 10$, en metros. Calcule su altura máxima y a qué distancia horizontal ocurre.

Guía de Solución Interactiva

1. La forma está dada con $a =$ _____, indicando concavidad hacia __________. 2. El vértice se halla leyendo h y k: $V($_____, _____$)$. 3. Altura máxima: _____ metros. Distancia horizontal: _____ metros.

Problema 2. Un cable colgante toma la forma $y = 0{,}1(x-20)^2 + 5$ metros. Determine la altura mínima del cable respecto al suelo.

Guía de Solución Interactiva

1. La parábola abre hacia __________ porque a es __________. 2. Las coordenadas del punto más bajo son (_____, _____). 3. La altura mínima es de _____ metros.

Problema 3. Los ingresos por un producto son $I(p) = -5(p-30)^2 + 4500$. Determine el precio óptimo para maximizar el capital recaudado.

Guía de Solución Interactiva

1. La variable independiente p representa el __________. 2. El vértice de la parábola económica es (_____, _____). 3. El precio óptimo de venta es \$_____.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un dron mapea el terreno descendiendo mediante la curva $A(t) = 3(t-8)^2 + 15$. Determine el punto más bajo del vuelo y el instante.

Problema 5. El control térmico de un servidor flutúa bajo $T(h) = 0{,}5(h-14)^2 + 20$ grados centígrados. Especifique la temperatura base mínima diaria alcanzada.

Problema 6. La colonia bacteriana decrece exponencialmente modelada cuadráticamente como $P(t) = 100(t-5)^2 + 200$ especímenes. Calcule la cantidad sobreviviente más crítica del experimento.

Problema 7. El riel de una montaña rusa cae abruptamente siguiendo $y = 4(x-12)^2 + 2$ metros. Halle la cota de seguridad inferior sobre el césped.

Problema 8. Una farmacéutica minimiza su error de dosificación midiendo varianzas con $E(x) = 0{,}01(x-250)^2 + 0{,}1$. Revele el nivel de miligramos x más preciso factible.

Problema 9. El tiro libre balístico cruza el estadio mediante $y = -0{,}02(x-25)^2 + 14$ metros. Halle la altura cumbre del balón deportivo lanzado.

Problema 10. Un radiotelescopio parabólico cóncavo obedece $y = 0{,}05(x-0)^2 - 8$ metros. Establezca la profundidad focal exacta desde la línea base del borde exterior.

Problema 11. Los aspersores giran arrojando agua trazando $A(x) = -1{,}5(x-4)^2 + 24$. Descifre el pico vertical de rociado hidratante en el campo.

Problema 12. El rayo láser corta cristal desviándose por refracción $R(t) = 2(t-3)^2 - 18$ milímetros. Especifique el margen negativo máximo penetrado por la cuchilla lumínica.

Problema 13. La curvatura aerodinámica de los faros vehiculares cumple $P(x) = 0{,}2(x-5)^2$. Declare la posición del vértice emisor focal del bulbo halógeno.

Problema 14. Un puente tibetano se deforma con pisadas $D(x) = 0{,}15(x-10)^2 - 15$ centímetros. Verifique la flexión descendente extrema del entramado colgante.

Problema 15. El domo botánico subterráneo perfila $y = -0{,}8(x-20)^2 + 320$ metros. Cuantifique la altura de la bóveda principal central.

Problema 16. El lente de un observatorio espacial concaviza su cristal por $L(x) = 0{,}001(x-50)^2 - 2{,}5$. Identifique el grosor más delgado pulido en milímetros.

Problema 17. Un horno solar concentra irradiación térmica usando $T(x) = 5(x-2)^2 + 800$ grados. Calcule la radiación mínima operativa del crisol cilíndrico.

Problema 18. La gestión logística aminora gastos de bodega bajo $G(q) = 0{,}25(q-40)^2 + 1000$ divisas. Precise la orden de inventario q perfectamente optimizada.

Problema 19. La eficiencia en quema de diésel responde a $C(v) = 0{,}05(v - 90)^2 + 4$ litros. Demuestre la velocidad vehicular v más ecológica recomendada.

Problema 20. El algoritmo bursátil predice pérdidas con $B(t) = 3(t - 15)^2 - 27$ puntos. Averigüe el instante crítico de mayor caída accionaria del fondo.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $V(7,4)$, Eje $x=7$
2. $f(x)=(x+3)^2+1$
3. $a=3$
4. $V(-9,-15)$
5. $g(x)=(x-5)^2+5$
6. $x=6$, Máx $=18$
7. $f(x)=2(x+2)^2+4$
8. $h(x)=2(x+4)^2-7$
9. $x=1$ y $x=9$
10. $f(x)=-(x-2)^2+3, V(2,3)$
11. $c=-8$
12. $y=-3x^2$
13. $y=\frac{1}{2}(x-4)^2+2$
14. $x=-6$ y $x=4$
15. Sí pertenece.
16. $p(x)=-3(x+3)^2+7, \text{Máx}=7$
17. $y=(x-5)^2-9$
18. $h=3$
19. $y=-0{,}1(x-10)^2+5$
20. Dom $\in \mathbb{R}$, Ran $\in [-7,\infty)$

Propuestos de Aplicación

1. Altura: 10m. Distancia: 1m.
2. 5 metros.
3. $30.
4. Altura 15, $t=8$.
5. 20°C.
6. 200 bacterias.
7. 2 metros.
8. 250 miligramos.
9. 14 metros.
10. -8 metros (profundidad 8).
11. 24 unidades de rociado.
12. -18 milímetros.
13. Posición $(5,0)$.
14. -15 centímetros.
15. 320 metros.
16. $-2{,}5$ milímetros.
17. 800 grados.
18. $q=40$ unidades.
19. $v=90$ km/h (o unidad usada).
20. $t=15$.

$V(h,k)$

¡Llegaste al Final!

'La vida, como una parábola, tiene sus puntos más altos y sus valles más profundos. Optimizar no se trata de evitar la curva, sino de saber exactamente dónde está tu vértice.'

- Geometría de la superación

¡Felicidades! Has dominado el arte de encontrar el pico máximo y el fondo absoluto de cualquier modelo cuadrático. El cálculo ahora está bajo tu control.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com