

$$\frac{a}{\frac{b}{c}}$$

PRECÁLCULO

# FRACCIONES COMPUESTAS

$$\frac{1}{1+x}$$

CUADERNO DE TRABAJO  
Técnicas de Simplificación

$$x^{-1} + y^{-1}$$

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

## Teoría: Fracciones Compuestas

Las fracciones compuestas (o complejas) son aquellas que contienen fracciones algebraicas en su numerador, en su denominador o en ambos. Son el "jefe final" de la simplificación antes de entrar al cálculo de límites.

### Método 1: Simplificación por Partes (Tradicional)

Este método consiste en trabajar el numerador principal y el denominador principal por separado hasta que ambos sean **fracciones simples únicas**.

1. Efectúe las sumas o restas en el numerador para obtener una sola fracción.
2. Haga lo mismo en el denominador.
3. Divida multiplicando los extremos (numerador final) y los medios (denominador final).

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

.... ▷

#### COMENTARIO

¡Hola, chicos y chicas!  
Una fracción compuesta parece intimidante, pero es solo una división disfrazada.  
¡Mantengan el orden en su hoja y el problema caerá solo!

### Método 2: Multiplicación por el MCM (Avanzado / Rápido)

Es el método más eficiente para expresiones muy densas o con varios niveles.

1. Encuentre el Mínimo Común Múltiplo (MCM) de **todos** los denominadores "pequeños" que aparecen en la fracción compuesta.
2. Multiplique el numerador principal y el denominador principal por este MCM.
3. Distribuya. Todos los denominadores menores se cancelarán mágicamente.

**Nota sobre exponentes negativos:** Una expresión como  $x^{-1} + y^{-1}$  es en realidad una fracción compuesta oculta:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ . Siempre conviértalos a fracciones primero.

.... ▷

#### COMENTARIO

La "ley de la oreja" (extremos y medios) solo funciona si arriba hay UNA sola fracción y abajo UNA sola fracción.  
¡No la apliquen si hay sumas sueltas!

.... ▷

#### COMENTARIO

El Método 2 es mi favorito. Funciona como una aplanadora que destruye todos los pisos del edificio fraccionario de un solo golpe. ¡Úsenlo para ganar tiempo en los exámenes!

## Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Fracción Compuesta Básica

**Enunciado:** Simplifique  $\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}$ .

**Solución por Método 2 (MCM):**

Los denominadores menores son  $x^2$  y  $x$ . El MCM es  $x^2$ .

Multiplicamos arriba y abajo por  $x^2$ :

$$\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{x^2-4}{x^2+2x}$$

Factorizamos:  $\frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)}$ .

Cancelamos  $(x+2)$  y resulta:  $\frac{x-2}{x}$ .

### Problema Resuelto 2: Exponentes Negativos

**Enunciado:** Simplifique  $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}$ .

**Solución:**

Reescribimos:  $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ .

El MCM de los denominadores menores ( $x^2, y^2, x, y$ ) es  $x^2y^2$ .

Multiplicamos numerador y denominador por  $x^2y^2$ :

$$\text{Arriba: } x^2y^2\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^2y^2\left(\frac{1}{y^2}\right) = y^2 - x^2.$$

$$\text{Abajo: } x^2y^2\left(\frac{1}{x}\right) - x^2y^2\left(\frac{1}{y}\right) = xy^2 - x^2y = xy(y-x).$$

Factorizamos arriba (diferencia de cuadrados):  $(y-x)(y+x)$ .

$$\text{Reemplazamos: } \frac{(y-x)(y+x)}{xy(y-x)} = \frac{y+x}{xy}.$$

### Problema Resuelto 3: Fracciones Continuas (Escalera)

**Enunciado:** Simplifique  $2 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ .

**Solución por partes (desde abajo hacia arriba):**

$$\text{Paso 1 (último nivel): } 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

$$\text{Paso 2 (inversión): } \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

$$\text{Paso 3 (suma final): } 2 + \frac{x}{x+1} = \frac{2(x+1)+x}{x+1} = \frac{2x+2+x}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}.$$

....▷

### COMENTARIO

Ojo: ¡No caigan en la trampa de pensar que  $(x^{-1}-y^{-1})^{-1} = x-y$ ! Los exponentes negativos NO se distribuyen en sumas ni restas.

**Problema Resuelto 4: Trinomios en Fracciones**

**Enunciado:** Simplifique  $\frac{\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x^2-9}}{\frac{1}{x+3}}$ .

**Solución:**

El denominador  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ .

MCM de denominadores menores:  $(x - 3)(x + 3)$ .

Multiplicamos el numerador principal por  $(x - 3)(x + 3)$ :

$$x(x + 3) - 2 = x^2 + 3x - 2.$$

Multiplicamos el denominador principal por  $(x - 3)(x + 3)$ :

$$1 \cdot (x - 3) = x - 3.$$

Expresión final:  $\frac{x^2+3x-2}{x-3}$ . (No es factorizable en racionales).

**Problema Resuelto 5: Variables como Fracciones**

**Enunciado:** Si  $u = \frac{a+b}{a-b}$ , evalúe y simplifique  $\frac{u-1}{u+1}$ .

**Solución:**

Reemplazamos  $u$ :  $\frac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a+b}{a-b} + 1}$ .

Multiplicamos arriba y abajo por  $(a - b)$ :

$$\text{Numerador: } (a + b) - 1(a - b) = a + b - a + b = 2b.$$

$$\text{Denominador: } (a + b) + 1(a - b) = a + b + a - b = 2a.$$

$$\text{Simplificando: } \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}.$$

## Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Física (Resistencia Equivalente)

**Contexto:** En un circuito, la resistencia equivalente está dada por  $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$ . Simplifique si las tres resistencias son iguales a  $x$ .

**Solución:**

Reemplazamos:  $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}}$ .

Sumamos denominadores homogéneos:  $\frac{1}{\frac{3}{x}}$ .

Invertimos la fracción:  $R_{eq} = \frac{x}{3}$ .

### Aplicación 2: Economía (Elasticidad)

**Contexto:** La elasticidad precio de la demanda de *misdulceitos.com* se aproxima usando  $E = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{P}{\Delta P}$ . Simplifique esta fracción de tasas.

**Solución:**

Aplicamos la ley de extremos y medios:

Multiplicamos  $\Delta Q$  por  $P$  y lo dividimos entre el producto de  $Q$  por  $\Delta P$ .

$$E = \frac{P \cdot \Delta Q}{Q \cdot \Delta P}$$

### Aplicación 3: Cinemática (Velocidad Media Armónica)

**Contexto:** Un bus de Civa viaja a Abancay a 80 km/h y retorna a  $x$  km/h. La velocidad media es  $V_m = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{x}}$ . Simplifique a una sola fracción.

**Solución:**

MCM del denominador menor es  $80x$ . Multiplicamos arriba y abajo:

Numerador:  $2(80x) = 160x$ .

Denominador:  $80x(\frac{1}{80}) + 80x(\frac{1}{x}) = x + 80$ .

Resultado:  $V_m = \frac{160x}{x+80}$ .

### Aplicación 4: Óptica Computacional

**Contexto:** Un algoritmo en IMCA UNI procesa distancias focales como  $F = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ . Reduzca este modelo a su forma lineal.

**Solución:**

Resolvemos el denominador complejo:  $1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ .

Invertimos:  $\frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1}$ .

Restamos de 1:  $1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$ .

....▷

### COMENTARIO

El modelado en economía y ciencias puras está plagado de fracciones de fracciones. ¡Simplificarlas antes de evaluar los datos evita errores de cálculo horribles!

**Aplicación 5: Ingeniería de Telecomunicaciones**

**Contexto:** La señal en Rappi Pro cae por nodos según  $S = \frac{y^{-2}-x^{-2}}{x^{-2}y^{-2}}$ . Simplifique las potencias negativas.

**Solución:**

El denominador  $x^{-2}y^{-2}$  es lo mismo que  $\frac{1}{x^2y^2}$ .

Numerador:  $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ .

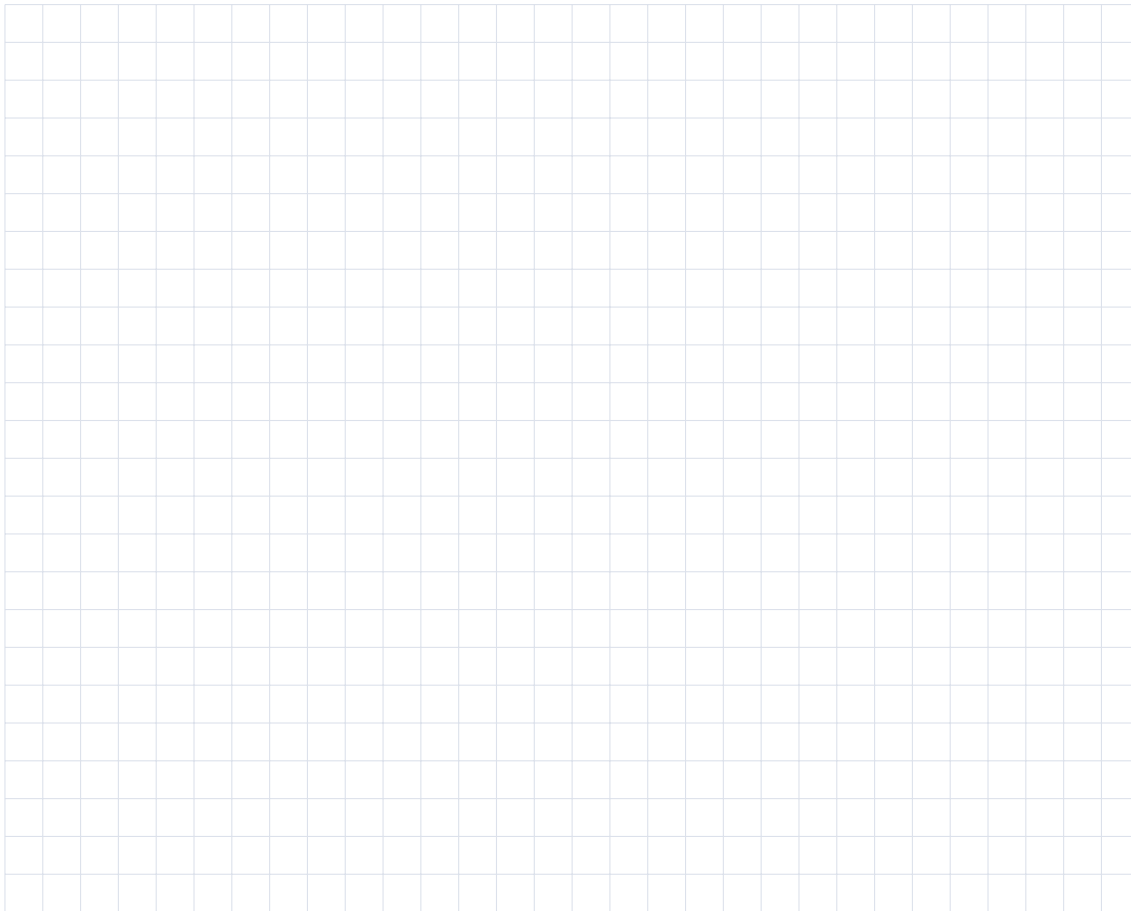
Dividiendo:  $\frac{\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}}{\frac{1}{x^2y^2}}$ .

Se cancelan los  $x^2y^2$ . Queda:  $S = x^2 - y^2$ .

## Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos.

1. Analice la expresión  $x^{-1} + y^{-1}$ . ¿Por qué es un error algebraico decir que es igual a  $(x + y)^{-1}$ ? Dé un contraejemplo numérico.
2. Al usar el método del MCM para simplificar fracciones compuestas, ¿por qué el valor total de la fracción principal no se altera al multiplicar arriba y abajo?
3. ¿Bajo qué condiciones la "ley de la oreja" (multiplicación de extremos y medios) no se puede aplicar directamente en una fracción compuesta?
4. Si en una fracción compuesta el denominador principal se anula para  $x = 2$ , ¿es posible que en la fracción simplificada final el valor  $x = 2$  sí esté definido? ¿Qué ocurre con el dominio?
5. Explique la diferencia estructural entre las fracciones continuas  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$  y  $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ .
6. En la expresión  $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ , ¿quién es el denominador real,  $b$ ,  $c$  o  $bc$ ? ¿Cómo la longitud de la línea de fracción afecta la interpretación?
7. ¿Por qué transformar una división compleja de polinomios en una multiplicación invirtiendo la segunda fracción es algebraicamente legal?
8. Si factoriza todos los términos *antes* de hallar el MCM de los denominadores menores, ¿cómo impacta esto en la velocidad y limpieza del cálculo?
9. Al simplificar  $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{y-x}$ , ¿cómo aplicaría la extracción del signo negativo para convertir la fracción en un problema trivial?
10. ¿Considera que las fracciones algebraicas compuestas son útiles en el modelado matemático del mundo real, o son solo gimnasia algebraica? Justifique.









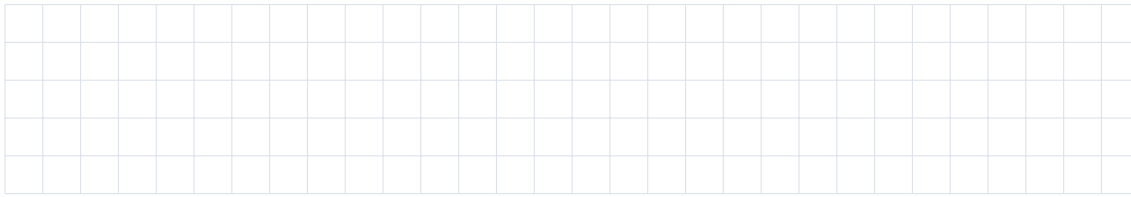




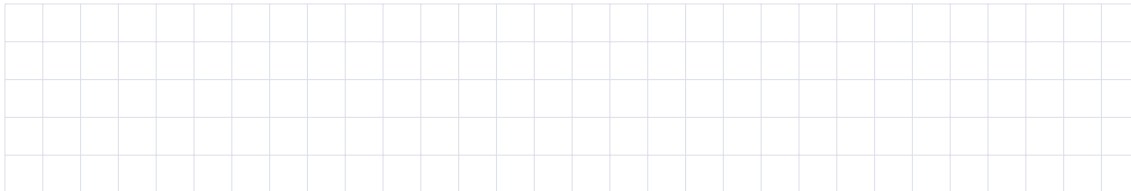




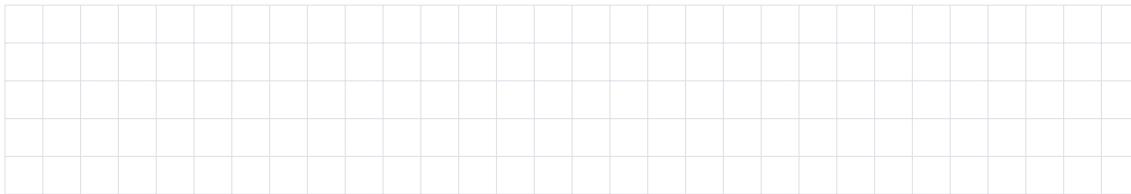




**Problema 19.** Para un diseño de infografía con TikZ, la escala de ejes debe ser  $\frac{x^{-3}+y^{-3}}{x^{-2}-x^{-1}y^{-1}+y^{-2}}$ . Determine la escala de reducción.



**Problema 20.** La amortiguación de sonido de una cabina varía como  $\frac{(s-1)^{-2}-s^{-2}}{(s-1)^{-1}-s^{-1}}$ . Halle el factor lineal de aislamiento acústico.



## Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

1.  $\frac{x}{x-3}$
2.  $\frac{1}{1-m}$
3.  $b + a$
4.  $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$
5.  $\frac{x+y}{x}$
6.  $\frac{1+4x}{x}$  o  $x^{-1} + 4$
7.  $\frac{x^2+1}{x^3+2x}$
8.  $\frac{a-b}{a+b}$
9.  $x + y$
10.  $\frac{1}{m-n}$
11. 2
12.  $\frac{x+2}{x}$
13.  $\frac{a}{a-b}$
14.  $\frac{x+2}{x}$
15.  $\frac{2x}{x^2+1}$
16.  $\frac{v^2+uv+u^2}{u^2v^2}$
17.  $x - x(1 - x) = x^2$
18. 2
19.  $\frac{a^2+b^2}{2ab}$
20.  $\frac{x^2}{x(x+2y)} = \frac{x}{x+2y}$

### Propuestos de Aplicación

1.  $\frac{i+2}{(1+i)^2}$
2.  $\frac{xy}{y-x}$
3.  $\frac{2f_2-d}{f_1f_2-d}$
4.  $\frac{n^2}{n^2-1}$
5.  $d - c$
6.  $x + 2$
7.  $\frac{b}{b-a}$
8.  $xy$
9.  $\frac{p^2q^2}{p^2-pq+q^2}$
10.  $t + 1$
11.  $\frac{u^2+v^2}{uv}$
12.  $\frac{x-y}{y}$
13.  $\frac{t-1}{t+3}$
14.  $b$
15.  $\frac{v-1}{2v-1}$
16.  $\frac{x+y}{x-y}$
17.  $\frac{-1}{m(m+h)}$
18.  $x$
19.  $\frac{x+y}{xy}$
20.  $\frac{2s-1}{s(s-1)}$

## ¡Llegaste al Final!

'La complejidad es solo la ilusión de lo simple apilado en capas. Domina tu MCM, desarma la torre, y verás la claridad.'

- Tu futuro matemático

¡Sigue desentrañando el álgebra, piso por piso! El cálculo superior te espera.

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)