PRECÁLCULO

FACTORIZACIÓN II

Trinomios $ax^2 + bx + c$ y Potencias

CUADERNO DE TRABAJO

Método del Aspa y Fórmulas Notables

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Factorización Avanzada

En este volumen subimos el nivel. Dominar el aspa simple y las sumas o diferencias de potencias te dará una ventaja táctica brutal para simplificar expresiones racionales en cálculo diferencial.

COMENTARIO

¡Hola, chicos y chicas! El aspa simple es prueba y error inteligente. No se desesperen si a la primera no cuadra el término central. ¡Sigan intentando!

1. Factorización de Trinomios $ax^2 + bx + c$

El método por excelencia es el **Aspa Simple**. Consiste en descomponer el primer y tercer término en factores que, multiplicados en cruz (aspa) y sumados, den como resultado el término central bx.

$$\begin{array}{ccccl} a_1x & & c_1 & & \rightarrow (a_1c_2)x \\ & \times & & & \\ a_2x & & c_2 & & \underline{\rightarrow (a_2c_1)x} \\ & & & & + \quad bx \quad \text{(Término central)} \end{array}$$

Si la suma cumple, los factores se toman **en línea recta**: $(a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$. Nota: Si $b^2 - 4ac$ no es un cuadrado perfecto, el polinomio no es factorizable en los números racionales.

2. Suma y Diferencia de Cubos $(a^3 \pm b^3)$

Son productos notables que debes memorizar a la perfección.

- **Suma:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- **Diferencia:** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Advertencia: El trinomio $(a^2 \pm ab + b^2)$ que resulta de esta factorización **nunca** es factorizable en los números reales. ¡No pierdas tiempo intentándolo!

COMENTARIO

Cuidado con las potencias superiores. $x^n - y^n$ SIEMPRE es divisible por $(x - y)$. ¡Es una regla de oro en álgebra!

3. Sumas y Diferencias de Potencias n-ésimas

Para exponentes mayores, aplicamos el teorema del factor:

- $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$ para todo n.
- $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$ **solo si** n **es impar**.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Aspa Simple Clásica

Enunciado: Factorice el trinomio $6x^2 - 7x - 3$.
Solución: Descomponemos los extremos.
$6x^2 = (3x)(2x)$
$-3 = (1)(-3)$
Verificamos en aspa:
$(3x)(-3) = -9x$
$(2x)(1) = 2x$
Suma: $-9x + 2x = -7x$ (¡Cumple con el término central!).
Agrupamos en línea recta: $(3x + 1)(2x - 3)$.

COMENTARIO
Si el signo del tercer término es negativo, los factores cruzados se restarán. ¡Juega estratégicamente con dónde pones el signo menos!

Problema Resuelto 2: Aspa Simple con Dos Variables

Enunciado: Factorice $10a^2 + 23ab - 5b^2$.
Solución: Descomponemos:
$10a^2 = (5a)(2a)$
$-5b^2 = (-b)(5b)$
Aspa: $(5a)(5b) = 25ab$, y $(2a)(-b) = -2ab$.
Suma: $25ab - 2ab = 23ab$. (Correcto).
Factores en horizontal: $(5a - b)(2a + 5b)$.

Problema Resuelto 3: Suma de Cubos con Coeficientes

Enunciado: Factorice completamente $8x^3 + 27y^6$.
Solución: Reconocemos bases cúbicas: $(2x)^3 + (3y^2)^3$.
Aplicamos $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ con $A = 2x$, $B = 3y^2$.
Primer factor: $(2x + 3y^2)$.
Segundo factor: $(2x)^2 - (2x)(3y^2) + (3y^2)^2 = 4x^2 - 6xy^2 + 9y^4$.
Respuesta: $(2x + 3y^2)(4x^2 - 6xy^2 + 9y^4)$.

Problema Resuelto 4: Diferencia de Quintas

Enunciado: Factorice $x^5 - 32$.
Solución: Reescribimos como $x^5 - 2^5$.
Usamos $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$.
Primer factor: $(x - 2)$.
Segundo factor (potencias de x bajan, de 2 suben):
$x^4 + x^3(2) + x^2(2^2) + x(2^3) + 2^4$.
Respuesta: $(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$.

Problema Resuelto 5: Aspa Simple Avanzada (Cambio de Variable)

Enunciado: Factorice $(x-2)^2 - 5(x-2) - 14$.
Solución: Hacemos el cambio $u = x - 2$.
El polinomio queda: $u^2 - 5u - 14$.
Aspa: $u^2 = (u)(u)$ y $-14 = (-7)(2)$.
Verificación: $2u - 7u = -5u$. (Correcto).
Factorizado en u: $(u-7)(u+2)$.
Regresamos a x: $((x-2)-7)((x-2)+2)$.
Simplificamos: $(x-9)(x)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Geometría Escolar

Contexto: El área del vestíbulo de Newton College es $A = 3x^2 + 10x + 8$. Si la base es el lado más largo, factorice para hallar las dimensiones exactas.
Solución: Aplicamos aspa a $3x^2 + 10x + 8$.
$3x^2 = (3x)(x)$, $8 = (4)(2)$.
Aspa: $3x(2) + x(4) = 6x + 4x = 10x$.
Factores: $(3x + 4)(x + 2)$.
Las dimensiones son $(3x + 4)$ y $(x + 2)$ metros.

Aplicación 2: Costos Comerciales

Contexto: En *misdulcecitos.com*, el modelo de costo por masa es $C = 5x^2 - 13x - 6$. Factorice la función para aislar la tasa de producción base.
Solución: Aspa a $5x^2 - 13x - 6$.
$5x^2 = (5x)(x)$, $-6 = (2)(-3)$.
Aspa: $5x(-3) + x(2) = -15x + 2x = -13x$.
La expresión del costo es $(5x + 2)(x - 3)$.

COMENTARIO
Las ecuaciones de costos a menudo tienen factores que representan "volumen de unidadesz çosto marginal". Factorizar separa estas métricas.

Aplicación 3: Modelado de Transporte

Contexto: La empresa Civa estima su fricción de ruta a Abancay usando $F = 8v^3 + 125$. Exprese esto como producto de una lineal por una cuadrática.
Solución: Es una suma de cubos: $(2v)^3 + (5)^3$.
Factor lineal: $(2v + 5)$.
Factor cuadrático: $(2v)^2 - (2v)(5) + (5)^2 = 4v^2 - 10v + 25$.
Resultado: $(2v + 5)(4v^2 - 10v + 25)$.

Aplicación 4: Comunidades Virtuales

Contexto: Un grupo de Facebook con 390k miembros calcula retiros mensuales como $M = n^3 - 8$. Factorice para el panel de métricas.
Solución: Diferencia de cubos: $n^3 - 2^3$.
Aplicamos la regla: $(n - 2)(n^2 + 2n + 4)$.
Este producto define las tendencias de los usuarios inactivos frente a la constante base.

Aplicación 5: Análisis Algorítmico

Contexto: Un código de modelización en IMCA UNI procesa matrices en tiempo $T = x^5 + y^5$. Factorice esto para dividir el tiempo en subrutinas.
Solución: Suma de potencias impares.
Factor base: $(x + y)$.
Desarrollo alternado: $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$.
Respuesta: $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando matemáticamente.

1. Al factorizar $x^2 + 5x + 6$, buscamos números que sumen 5 y multipliquen 6. ¿Por qué esta lógica es solo un caso especial del aspa simple?

2. Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ de un trinomio es igual a 7, ¿se puede factorizar en los números enteros? Justifique.

3. ¿Por qué la fórmula para la suma de cuadrados, $a^2 + b^2$, no se puede factorizar en el conjunto de los números reales?

4. En la diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, el trinomio resultante nunca es un trinomio cuadrado perfecto. Explique la diferencia clave.

5. Si un estudiante afirma que $x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$, ¿está el polinomio completamente factorizado? ¿Qué pasos faltan?

6. Al aplicar aspa simple a $2x^2 + x - 1$, el orden en que colocamos los factores del -1 (arriba o abajo) cambia el resultado. ¿Por qué?

7. ¿Es posible factorizar $x^4 + y^4$ mediante el teorema del factor real? Analice el comportamiento de las potencias pares.

8. Explique por qué el signo del segundo factor en la factorización de $a^5 + b^5$ debe alternar obligatoriamente entre positivo y negativo.

9. Geométricamente, si $x^2 + 7x + 10$ representa el área de un rectángulo, ¿qué representan los factores $(x + 5)$ y $(x + 2)$?

10. Si tiene la expresión $x^2 + px + q$, ¿qué condición deben cumplir p y q si ambos factores resultantes deben tener signos negativos?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Factorice por aspa simple: $2x^2 - 11x + 15$.

Guía de Solución Interactiva

1. Descompón los extremos:
$2x^2 = (\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_)$ y $15 = (\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_)$ (usa signos negativos)

2. Multiplica en aspa y verifica la suma:
$\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ = -11x$

3. Agrupa en línea recta:
Respuesta final: $(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$

Problema 2. Factorice la diferencia de cubos: $125m^3 - 8n^3$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica las bases cúbicas A y B:
$A = \sqrt[3]{125m^3} = \_\_\_\_\_\_$, $B = \sqrt[3]{8n^3} = \_\_\_\_\_\_$

2. Construye el factor lineal $(A - B)$:
$(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$

3. Construye el factor trinómico $(A^2 + AB + B^2)$:
Respuesta: $(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$

Problema 3. Factorice la suma de potencias impares: $x^5 + 1$.

Guía de Solución Interactiva

1. Expresa como suma de potencias 5tas: $x^5 + 1^5$.
Factor lineal = $(\_\_\_\_\_\_)$

2. Genera los 5 términos del segundo factor alternando signos:
$x^4 - x^3(1) + \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ + 1^4$

3. Escribe el resultado completo:
Respuesta: $(\_\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$

Problemas Generales

Problema 4. Factorice por aspa simple: $3x^2 + 14x - 5$.

Problema 5. Factorice: $m^3 + 64$.

Problema 6. Aplique aspa simple: $15y^2 - 2y - 8$.

Problema 7. Factorice la diferencia: $27x^3 - 1000$.

Problema 8. Factorice completamente: $x^4 - 13x^2 + 36$. (Pista: aspa y luego diferencia de cuadrados).

Problema 9. Factorice el trinomio de dos variables: $12a^2 - 7ab - 10b^2$.

COMENTARIO

En los trinomios, si el último número es gigantesco, no intenten todas las combinaciones. Piensen en los divisores cercanos a la raíz de ese número.

Problema 10. Factorice $y^7 + 128$.

Problema 11. Use aspa simple: $8x^2 + 22x + 15$.

Problema 12. Factorice completamente: $x^6 - 64y^6$. (Empiece con diferencia de cuadrados).

Problema 13. Factorice el trinomio cúbico disfrazado: $x^6 - 7x^3 - 8$.

Problema 14. Aplique aspa simple usando fracciones: $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. (Sugerencia: factorice $1/6$ primero).

Problema 15. Factorice la suma: $1 + 216x^9$.

Problema 16. Factorice el polinomio con cambio de variable: $(a+b)^2 - 12(a+b) + 35$.

Problema 17. Factorice: $20x^4 + 31x^2 - 9$.

Problema 18. Factorice la diferencia de potencias pares sin suma directa: $a^4 - 81b^4$.

Problema 19. Factorice con aspa doble indirecta: $10x^2 - 19x(x-1) - 15(x-1)^2$.

Problema 20. Factorización avanzada (Quita y pon): $x^4 + 4$. (Sugerencia: sume y reste $4x^2$).

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. El proyecto de maestría en IMCA UNI modela la complejidad de un servidor como $C = 2n^2 + 9n + 4$. Factorice el modelo.

Guía de Solución Interactiva

1. Busca factores del $2n^2$ y del 4:
(_______)(_______) y (_______)(_______)

2. Verifica que el aspa sume $9n$:
$2n(4) + n(1) = 9n$

3. Escribe los factores horizontales:
Modelo = (______________)(______________)

Problema 2. Las interacciones de la web *matematicasmedicina.com* caen a un ritmo $V = t^3 - 27$. Exprese la métrica en dos factores lógicos.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica el producto notable:
Es una diferencia de ______________

2. Extrae las bases:
Raíces son t y _____

3. Aplica la fórmula general:
Métrica = (__________)(___________________)

Problema 3. Las suscripciones de *clasesvirtuales.net* crecen según $S = 5x^2 - 14x - 3$. Factorice para estimar los perfiles de usuario.

Guía de Solución Interactiva

1. Usa el método del aspa:
$5x^2 = (5x)(x)$, $-3 =$ (_____)(_____)

2. Prueba las posiciones para obtener $-14x$:
$5x(-3) + x(1) =$ __________

3. Agrupa la solución:
$S =$ (______________)(______________)

Problemas Generales

Problema 4. Un alumno paga tutorías de matemáticas al profesor. El presupuesto mensual total se rige por la cuadrática $3x^2 + 10x - 8$. Factorice la tarifa.

Problema 5. El algoritmo de Interactive Brokers calcula el volumen en trading de pares como $V = a^3 + 64b^3$. Factorice este volumen de compra-venta cruzada.

Problema 6. La licuadora profesional Ninja pierde revoluciones por fricción según $R = 4t^2 - 15t - 4$. Factorice el tiempo t de decaimiento.

Problema 7. Los servidores del foro sufren una carga térmica $L = x^5 + 243$. Factorice la temperatura x para ajustar los ventiladores integrados.

Problema 8. El curso de Netzun tiene una duración proyectada según la retención $D = 6x^2 + x - 15$. Halle los factores de módulos interactivos.

Problema 9. Los puntajes del examen del British Council oscilan bajo el modelo $P = 12y^2 - 13y + 3$. Factorice la expresión de fluidez.

Problema 10. Rappi Pro minimiza demoras con la ecuación de rutas $t = 10z^2 - 11z - 6$. Factorice la variable espacial z.

Problema 11. Una transferencia interbancaria en BCP tiene una tasa en microcentavos de $T = m^3 - 1000$. Factorice la comisión móvil del banco.

Problema 12. El espacio en alacena para conservar latas de atún Primor se calcula con $E = 14x^2 + 29x - 15$. Determine las dimensiones modulares.

Problema 13. La cubeta de pollo frito KFC ajusta precios del combo familiar por $P = 8x^3 + 1$. Factorice para promociones unitarias.

Problema 14. En Norky's, la distribución de mesas optimiza el área local con $A = 15x^2 - 14x - 8$. Calcule el binomio de pasillos.

Problema 15. McDonald's evalúa el flujo de autos en drive-thru usando $F = u^4 - 16$. Reduzca el embotellamiento con diferencia de cuadrados sucesiva.

Problema 16. En la Universidad de Lima, un nuevo pabellón requiere una zapata de $Z = 6k^2 + 17k + 5$. Factorice la resistencia estructural del suelo.

Problema 17. La PUCP asigna presupuesto a un laboratorio mecatrónico modelado por $B = a^6 - b^6$. Factorice completamente separando la suma y diferencia.

Problema 18. La trayectoria parabólica de un tiro libre se mide por $h = -5t^2 + 18t + 8$. Factorice sacando el signo negativo primero.

Problema 19. La depreciación de hardware minero ocurre a razón de $W = x^5 - 1$. Factorice para proyectar el recambio anual.

Problema 20. El costo marginal de ensamblaje es $C = 21x^2 - 34x + 8$. Halle la función factorizada que determina la economía de escala.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $(2x-5)(x-3)$
2. $(5m-2n)(25m^2+10mn+4n^2)$
3. $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$
4. $(3x-1)(x+5)$
5. $(m+4)(m^2-4m+16)$
6. $(5y-4)(3y+2)$
7. $(3x-10)(9x^2+30x+100)$
8. $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$
9. $(4a-5b)(3a+2b)$
10. $(y+2)(y^6-2y^5+4y^4-8y^3+16y^2-32y+64)$
11. $(4x+5)(2x+3)$
12. $(x-2y)(x+2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$
13. $(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)$
14. $\frac{1}{6}(x+6)(x-3)$
15. $(1+6x^3)(1-6x^3+36x^6)$
16. $(a+b-7)(a+b-5)$
17. $(5x^2+9)(4x^2-1)$ *luego:* $(5x^2+9)(2x-1)(2x+1)$
18. $(a^2+9b^2)(a-3b)(a+3b)$
19. $(x+3)(2x-5)$ (Reducido de $(5x-3(x-1))(2x-5(x-1))$)
20. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

Propuestos de Aplicación

1. $(2n+1)(n+4)$
2. $(t-3)(t^2+3t+9)$
3. $(5x+1)(x-3)$
4. $(3x-2)(x+4)$
5. $(a+4b)(a^2-4ab+16b^2)$
6. $(4t+1)(t-4)$
7. $(x+3)(x^4-3x^3+9x^2-27x+81)$
8. $(3x+5)(2x-3)$
9. $(4y-3)(3y-1)$
10. $(5z+2)(2z-3)$
11. $(m-10)(m^2+10m+100)$
12. $(7x-3)(2x+5)$
13. $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
14. $(5x+2)(3x-4)$
15. $(u^2+4)(u-2)(u+2)$
16. $(3k+1)(2k+5)$
17. $(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
18. $-(5t+2)(t-4)$
19. $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
20. $(7x-2)(3x-4)$

¡Llegaste al Final!

'Dominar las aspas y las potencias te da visión de rayos X en álgebra. Ahora puedes ver la estructura oculta de cualquier función.'

- Tu futuro matemático

¡Sigue avanzando firme! El cálculo superior ya está a la vuelta de la esquina.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com