PRECÁLCULO

FACTORIZACIÓN I

Factor Común, Agrupación y TCP

CUADERNO DE TRABAJO

Simplificación y Modelado Avanzado

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Factorización Básica e Intermedia

Factorizar es el proceso inverso de multiplicar. Nos permite descomponer polinomios complejos en bloques fundamentales (factores), lo cual es indispensable para resolver ecuaciones, simplificar fracciones y graficar funciones.

Consiste en extraer la máxima expresión matemática que divide exactamente a todos los términos.

- **Monomio:** Se extrae el Máximo Común Divisor (MCD) de los coeficientes numéricos y las letras repetidas con su *menor* exponente.
  Ejemplo: $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$.
- **Polinomio:** A veces el factor repetido es un bloque entero entre paréntesis.
  Ejemplo: $x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y)$.

····▷ **COMENTARIO**

¡Hola, chicos y chicas! Factorizar es como desarmar un set de Lego para ver de qué piezas está hecho. ¡El secreto está en ser muy observadores!

Se utiliza en polinomios de 4, 6 u 8 términos donde no hay un factor común global.

1. Se agrupan los términos convenientemente (de dos en dos o tres en tres).
2. Se extrae el factor común de cada grupo.
3. Si se agrupó bien, emergerá un *factor común polinomio* idéntico en todos los grupos.

Ejemplo: $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$.

····▷ **COMENTARIO**

Ojo aquí: si extraen un término completo, no desaparece, ¡deja un "1.en su lugar! $x^2 + x \neq x(x)$. Lo correcto es $x(x + 1)$.

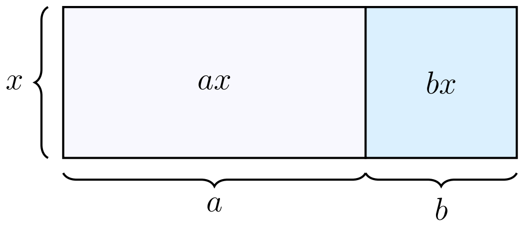
Un trinomio es cuadrado perfecto si proviene del desarrollo de un binomio al cuadrado. **Condiciones:**

1. El primer y tercer término deben ser positivos y tener raíz cuadrada exacta.
2. El término central debe ser exactamente el *doble del producto* de esas raíces.

Fórmula: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

····▷ **COMENTARIO**

Cuidado con los signos al agrupar. Si colocan un "delante de un paréntesis, DEBEN cambiar los signos de todo lo que entre en él.



Interpretación de $ax + bx = x(a + b)$

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Factor Común Complejo

Enunciado: Factorice completamente: $24x^4y^3 - 36x^3y^4 + 60x^5y^2$.
Solución:
1. Hallamos el MCD de los coeficientes (24, 36, 60), que es 12.
2. Para x, el menor exponente es x^3. Para y, el menor exponente es y^2.
3. El factor común monomio es $12x^3y^2$.
4. Dividimos cada término original entre el factor común:
$12x^3y^2(2xy - 3y^2 + 5x^2)$.
Respuesta: $12x^3y^2(5x^2 + 2xy - 3y^2)$.

Problema Resuelto 2: Agrupación Estratégica

Enunciado: Factorice $x^3 - 2x^2y - ax^2 + 2axy$.
Solución: Agrupamos los dos primeros y los dos últimos términos.
$(x^3 - 2x^2y) - (ax^2 - 2axy)$ $\leftarrow$ (Nota: el signo de $2axy$ cambia por el .^{ex}terior).
Factor común del primer grupo: $x^2(x - 2y)$.
Factor común del segundo grupo: $ax(x - 2y)$.
La expresión queda: $x^2(x - 2y) - ax(x - 2y)$.
Extraemos el factor polinomio común $(x - 2y)$:
$(x - 2y)(x^2 - ax)$.
Finalmente, extraemos factor común x del segundo binomio:
$x(x - 2y)(x - a)$.

COMENTARIO
¡Siempre revisen si pueden seguir factorizando! Un ejercicio no termina hasta que todos los factores sean primos.

Problema Resuelto 3: TCP con Fracciones

Enunciado: Factorice la expresión $\frac{x^4}{16} - \frac{x^2y}{2} + y^2$.
Solución: Verificamos si es un TCP.
Raíz del primer término: $\sqrt{x^4/16} = x^2/4$.
Raíz del tercer término: $\sqrt{y^2} = y$.
Verificamos el término central: $2 \cdot (x^2/4) \cdot (y) = x^2y/2$. ¡Coincide!
Tomamos el signo del término central (-) y formamos el binomio al cuadrado:
$\left(\frac{x^2}{4} - y\right)^2$.

Problema Resuelto 4: TCP en Bloques

Enunciado: Factorice $(m+n)^2 - 6(m+n) + 9$.
Solución: Trate a $(m+n)$ como una sola variable, digamos U.
La expresión sería $U^2 - 6U + 9$.
Verificamos TCP: raíces son U y 3. El doble producto es $2(U)(3) = 6U$.
Factorizado sería $(U-3)^2$.
Devolvemos el valor original de U:
$((m+n)-3)^2 = (m+n-3)^2$.

COMENTARIO
Las variables en los exponentes asustan, pero la regla de "tomar el menor exponente"se mantiene firme.

Problema Resuelto 5: Factor Común Literal

Enunciado: Factorice $x^{a+2} - 3x^{a+1} + x^a$.
Solución: La base repetida es x. El menor exponente de todos es a.
Extraemos x^a como factor común y restamos los exponentes:
$x^a(x^{(a+2)-a} - 3x^{(a+1)-a} + x^{a-a})$.
$x^a(x^2 - 3x^1 + x^0)$.
Como $x^0 = 1$, la respuesta final es:
$x^a(x^2 - 3x + 1)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Geometría (Hotelería)

Contexto: Un empresario hotelero desea alfombrar un salón cuya área en m^2 está dada por $A = 4x^2 + 12xy + 9y^2$. Exprese las dimensiones del salón si es cuadrado.
Solución: Verificamos si es TCP.
Raíces: $\sqrt{4x^2} = 2x$, $\sqrt{9y^2} = 3y$.
Central: $2(2x)(3y) = 12xy$.
Área factorizada: $(2x+3y)^2$. Por tanto, el lado del salón mide $(2x+3y)$ metros.

Aplicación 2: Costos de Producción

Contexto: En *misdulcecitos.com*, el costo de hornear y empaquetar pasteles está modelado por $C = Px^2+Pxy+2x^2+2xy$. Factorice para hallar la relación de variables.
Solución: Agrupamos: $(Px^2 + Pxy) + (2x^2 + 2xy)$.
Extraemos común: $Px(x + y) + 2x(x + y)$.
Extraemos $(x + y)$: $(x + y)(Px + 2x)$.
Finalmente, extraemos x: $x(x + y)(P + 2)$.

Aplicación 3: Análisis de Redes Sociales

Contexto: Un grupo de Facebook de 390k miembros tiene una tasa de interacciones dada por $I = n^3 - n^2 + n - 1$. Factorice para modelar días de alta retención.
Solución: Agrupamos por pares: $(n^3 - n^2) + (n - 1)$.
Extraemos n^2: $n^2(n - 1) + 1(n - 1)$.
Factor polinomio: $(n - 1)(n^2 + 1)$.

Aplicación 4: Viajes y Distancias

Contexto: La distancia cubierta por un bus de redBus viajando a Abancay es $D = vt^2 - 4vt + 4v$. Si la velocidad v es constante, exprese la distancia como un cuadrado perfecto.
Solución: Extraemos el factor común v:
$D = v(t^2 - 4t + 4)$.
El paréntesis es un TCP. Raíces t y 2, signo central (-).
$D = v(t - 2)^2$.

Aplicación 5: Optimización de Materiales

Contexto: Un estudiante del Newton College modela el volumen de una caja para su proyecto IB como $V = \pi R^3 h - \pi R^2 h^2$. Factorice completamente.
Solución: Buscamos factores comunes. Ambos tienen π, R^2 (menor exponente de R), y h (menor exponente de h).
$V = \pi R^2 h(R^1 h^0 - R^0 h^1)$.
$V = \pi R^2 h(R - h)$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos sólidos.

1. ¿Por qué la expresión $x^2 + y^2$ no se puede factorizar en los números reales usando factor común o TCP?
2. Al factorizar $3a - 3b + ax - bx$, un estudiante agrupa $(3a + ax) - (3b + bx)$. ¿Llegará a la misma respuesta correcta? Justifique.
3. Si el trinomio $x^2 + kx + 25$ es un cuadrado perfecto, ¿cuáles son los dos posibles valores reales para k?
4. Explique por qué extraer el factor común es esencialmente aplicar la propiedad distributiva en reversa. Dé un ejemplo numérico simple.
5. Analice el polinomio $x^3 - x$. ¿Por qué no está completamente factorizado si escribimos $x(x^2 - 1)$?
6. En el trinomio $4x^2 + 12x + 9$, ¿qué sucedería con la factorización si el término $12x$ cambiara a $-12x$?
7. ¿Es posible factorizar por agrupación un polinomio de 5 términos? Explique cómo la cantidad de términos afecta la estrategia.
8. Al tener $(a-b)^2$ y $(b-a)^2$, ¿son expresiones equivalentes? Demuéstrelo usando factorización por factor común de -1.
9. ¿Por qué siempre se recomienda buscar un factor común *antes* de intentar aplicar trinomio cuadrado perfecto o agrupación?
10. Si un área está dada por $x^2 + 6x + 9$, geométricamente representa un cuadrado. ¿Qué representaría $x^2 + 6x + 8$ y por qué no es un TCP?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Extraiga el factor común: $15a^3b^2 - 25a^2b^4 + 10a^4b^3$.

Guía de Solución Interactiva

1. Halla el MCD de 15, 25 y 10:
MCD = __________

2. Identifica las variables comunes con sus menores exponentes:
Para a: __________ Para b: __________

3. Escribe el factor común y divide cada término:
__________$(3a -$ __________ $+$ __________$)$

Problema 2. Factorice por agrupación: $px + py + qx + qy$.

Guía de Solución Interactiva

1. Agrupa los dos primeros y los dos últimos términos:
$(px + py) + ($_______________$)$

2. Extrae el factor común de cada grupo:
$p($__________$) + q($__________$)$

3. Extrae el paréntesis común:
Respuesta: (__________)(__________)

Problema 3. Factorice el trinomio: $9m^2 - 24mn + 16n^2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Calcula la raíz cuadrada exacta de los extremos:
Raíz de $9m^2 =$ __________ Raíz de $16n^2 =$ __________

2. Verifica el término central con el doble producto:
2(__________)(__________) $= 24mn$ (¡Comprobado!)

3. Escribe el binomio al cuadrado con el signo central:
Respuesta: (____________________)^2

Problemas Generales

Problema 4. Factorice por factor común: $7x^2y^3z^4 - 21x^3y^2z^5 + 14x^4y^4z^3$.

Problema 5. Factorice el TCP: $x^2 + 14x + 49$.

Problema 6. Factorice agrupando: $am - bm + an - bn$.

Problema 7. Extraiga factor común polinomio: $(x+1)a - (x+1)b + (x+1)c$.

Problema 8. Factorice completamente: $2x^3 - 12x^2 + 18x$.

Problema 9. Factorice agrupando: $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$.

Problema 10. Factorice el TCP con fracciones: $\frac{1}{4}x^2 - xy + y^2$.

COMENTARIO

Las fracciones te pueden asustar, pero operan igual. Si tienes denominadores comunes, puedes sacar la fracción entera como factor común.

Problema 11. Extraiga el factor común literal: $a^{n+3} - 2a^{n+2} + a^{n+1}$.

Problema 12. Factorice y simplifique: $(2x - 3)^2 - (2x - 3)(x + 4)$.

Problema 13. Factorice agrupando: $x^3 + x^2 + x + 1$.

Problema 14. Factorice el TCP anidado: $(a + b)^2 - 4(a + b) + 4$.

Problema 15. Extraiga el factor común de la expresión: $-8x^2y+16xy^2-24x^3y^3$. (Saque el signo negativo).

Problema 16. Factorice el TCP avanzado: $16x^4 - 40x^2y^3 + 25y^6$.

Problema 17. Agrupación de 6 términos: $ax + bx + cx + ay + by + cy$.

Problema 18. Factorice: $100x^{10} - 60a^4x^5y^6 + 9a^8y^{12}$.

Problema 19. Determine el valor de c para que $9x^2 - 30x + c$ sea un TCP y factorícelo.

Problema 20. Factorice completamente el trinomio especial: $(x^2 - y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. En la pastelería *misdulcecitos.com*, el azúcar usado se modela como $A = 5k^2 + 10k$. Factorice para hallar kilos base.

Guía de Solución Interactiva

1. Encuentra el máximo común divisor numérico y la letra común:
Factor común = __________

2. Divide cada término entre el factor común:
$\frac{5k^2}{5k} =$ ______, $\frac{10k}{5k} =$ _____

3. Escribe la expresión factorizada:
$A =$ ____________________

Problema 2. El área de un terreno en La Molina es $A = x^2 + 8x + 16$. Halle el lado del terreno cuadrangular.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica si es un Trinomio Cuadrado Perfecto:
Raíces extremas: __________ y __________

2. Verifica el término del centro:
Doble producto = __________

3. Expresa el binomio y toma su base como el lado:
Lado = _______________

Problema 3. Un algoritmo agrupa ingresos así: $R = px - qx + py - qy$. Simplifique para la programación del sistema.

Guía de Solución Interactiva

1. Agrupa de dos en dos y extrae factor común de cada par:
$x($__________$) + y($__________$)$

2. Revisa que los paréntesis sean idénticos:
Sí, ambos son __________

3. Extrae el paréntesis común final:
$R =$ ____________________

Problemas Generales

Problema 4. Un trader usa pares estadísticos. Su modelo de riesgo es $R = 4x^2 - 12xy + 9y^2$. Exprese el riesgo como cuadrado perfecto.

Problema 5. La app de Rappi Pro cobra entregas modeladas por $C = \pi r^2 h + 2\pi rh$. Factorice $2\pi rh$ como factor común para la interfaz.

Problema 6. Newton College diseña una sala de conferencias con área $A = 25a^2 + 40ab + 16b^2$. Calcule el binomio que define su lado.

Problema 7. El desgaste térmico de una licuadora Ninja es $W = T^3 - 3T^2$. Extraiga la temperatura T al máximo exponente posible.

Problema 8. En una compra recurrente de conservas de atún, el precio acumulado es $P = a^2x + a^2y - b^2x - b^2y$. Factorice completamente por agrupación.

Problema 9. Para un simulacro IB de admisiones PUCP, el puntaje base se corrige usando $P = 16t^4 - 24t^2 + 9$. Exprese como TCP.

Problema 10. Un hotel en Santa Anita proyecta ganancias $G = ux - vx - u + v$. Factorice prestando atención a los signos negativos al agrupar.

Problema 11. Al desarrollar contenido interactivo en LaTeX, el espaciado lateral sigue $E = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + y^2$. Forme el binomio al cuadrado.

Problema 12. KFC optimiza entregas donde la ruta es $R = x^n + x^{n+1}$. Saque el factor común para hallar la constante de ruta.

Problema 13. La energía disipada por un circuito de red es $E = 49m^2 - 14m + 1$. Verifique y convierta a trinomio cuadrado perfecto.

Problema 14. Un grupo de matemáticas con 390k usuarios clasifica ayudas. Su base de datos es $B = 3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$. Factorice.

Problema 15. Las descargas de *matematicasmedicina.com* decaen siguiendo

$D = e^{2t} - 4e^t + 4$. Factorice tratando e^t como una variable normal.

Problema 16. El viaje en Civa a Abancay consume combustible $F = v^3 - v^2 + v - 1$. Agrupe y exprese en dos factores.

Problema 17. Las clases particulares online cotizan el ancho de banda $W = (p+q)^2 + 10(p+q) + 25$. Halle el bloque TCP simplificado.

Problema 18. Un menú web desaparece al hacer scroll según $S = a^x b^y - a^{x+1} b^{y+1}$. Extraiga el máximo factor común.

Problema 19. Para hamburguesas McDonald's, el área de empaque base es $A = 36 - 12x + x^2$. Invierta el orden para hallar el TCP clásico.

Problema 20. La tienda de cakes modela el diámetro d con $d = x^{2a} - 2x^a y^b + y^{2b}$. Simplifique los exponentes literales en un binomio al cuadrado.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $5a^2b^2(3a - 5b^2 + 2a^2b)$
2. $(x + y)(p + q)$
3. $(m - n)(a - b)$
4. $(x + 1)(a - b + c)$
5. $2x(x - 3)^2$
6. $(a - 2)(3x + 3y - 2b)$
7. $(\frac{1}{2}x - y)^2$
8. $a^{n+1}(a^2 - 2a + 1) = a^{n+1}(a - 1)^2$
9. $(2x - 3)(x - 7)$
10. $(x^2 + 1)(x + 1)$
11. $(a + b - 2)^2$
12. $-8xy(x - 2y + 3x^2y^2)$
13. $(4x^2 - 5y^3)^2$
14. $(a + b + c)(x + y)$
15. $(10x^5 - 3a^4y^6)^2$
16. $c = 25$, $(3x - 5)^2$
17. $(x^2 - y^2 + 1)^2$
18. $7x^2y^2z^3(yz - 3xz^2 + 2x^2y^2)$ (Problema 4 movido al final por espacio)
19. $(x + 7)^2$
20. $(a - b)(m + n)$

Propuestos de Aplicación

1. $5k(k + 2)$
2. $x + 4$
3. $(p - q)(x + y)$
4. $(2x - 3y)^2$
5. $2\pi rh(\frac{r}{2} + 1)$
6. $(5a + 4b)^2$
7. $T^2(T - 3)$
8. $(x + y)(a - b)(a + b)$
9. $(4t^2 - 3)^2$
10. $(u - v)(x - 1)$
11. $(\frac{1}{3}x + y)^2$
12. $x^n(1 + x)$
13. $(7m - 1)^2$
14. $(x + y - 2)(3a - 2b)$
15. $(e^t - 2)^2$
16. $(v^2 + 1)(v - 1)$
17. $(p + q + 5)^2$
18. $a^xb^y(1 - ab)$
19. $(x - 6)^2$ o $(6 - x)^2$
20. $(x^a - y^b)^2$

¡Llegaste al Final!

'Descomponer un problema complejo en sus factores más simples es el primer paso para dominar cualquier desafío matemático.'

- Tu futuro matemático

¡Sigue factorizando el mundo, término a término! El cálculo superior te espera.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com